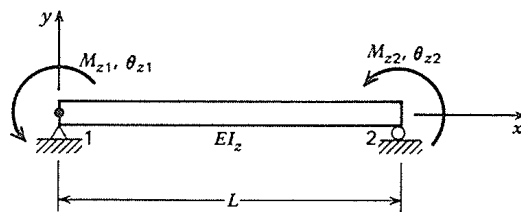


構造解析第9回

例題7

単純支持の一様断面はりのたわみ性マトリックスを導け。

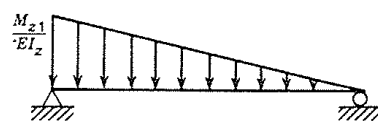
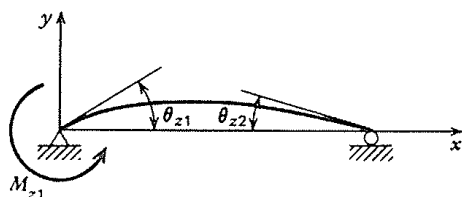


—— 解答 ——

モールの定理より、回転角は仮想荷重図のせん断力に等しいので、

$$\text{下の仮想荷重図面積} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_{z1}}{EI_z} \times L = \frac{M_{z1}L}{2EI_z}$$

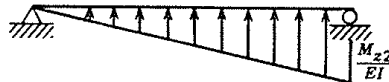
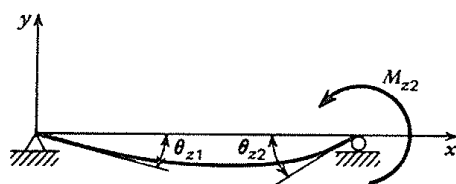
$\therefore \theta_{z1} = \frac{2}{3} \times \text{仮想荷重図面積}, \theta_{z2} = \frac{1}{3} \times \text{仮想荷重図面積}$ であることを考慮すると、



$$\theta_{z1} = \frac{M_{z1}L}{3EI_z} \quad \theta_{z2} = -\frac{M_{z1}L}{6EI_z}$$

(a) 図

下図についても同様に、



$$\theta_{z1} = -\frac{M_{z2}L}{6EI_z} \quad \theta_{z2} = \frac{M_{z2}L}{3EI_z}$$

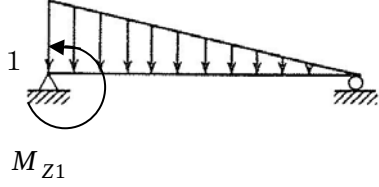
(b) 図

となる。これらをまとめてマトリックス形で表わすと次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{L}{6EI_z} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{z1} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}$$

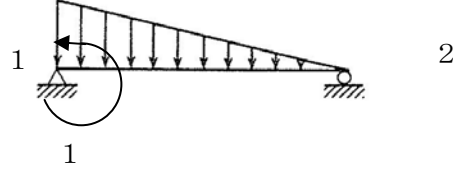
例題 7 の補足 (a)図の回転角について：仮想仕事法による別解)

単純梁の節点 1 に M_{z1} ，単位モーメントが夫々作用した場合の曲げモーメント図は，(c)図，(d)図となる．



$$M_x = -\frac{M_{z1}}{L}x + M_{z1}$$

(c) 図



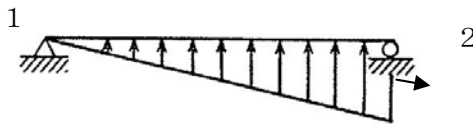
$$\bar{M} = 1 - \frac{x}{L}$$

(d) 図

(c)図より $M_x = -\frac{M_{z1}}{L}x + M_{z1}$ ，(d)図より $\bar{M} = 1 - \frac{x}{L}$ を仮想仕事式に代入すると，

$$\begin{aligned}\theta_{z1} &= \int_0^L \frac{M_x \bar{M}}{EI_z} dx = \int_0^L \frac{\left(-\frac{M_{z1}}{L}x + M_{z1}\right)\left(1 - \frac{x}{L}\right)}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^L \left(\frac{M_{z1}}{L^2}x^2 - \frac{2M_{z1}}{L}x + M_{z1}\right) dx \\ &= \frac{1}{EI_z} \left[\frac{M_{z1}}{L^2} \left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{M_{z1}}{L}x^2 + M_{z1}x \right]_0^L = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{M_{z1}L}{3} - M_{z1}L + M_{z1}L \right] = \frac{M_{z1}L}{3EI_z} \\ \therefore \theta_{z1} &= \frac{M_{z1}L}{3EI_z}\end{aligned}$$

同様に回転角 θ_{z2} については，単純梁の節点 2 に単位モーメントが作用した場合であり，曲げモーメント図は (e)図となる．



(e) 図 $\bar{M} = -\frac{x}{L}$

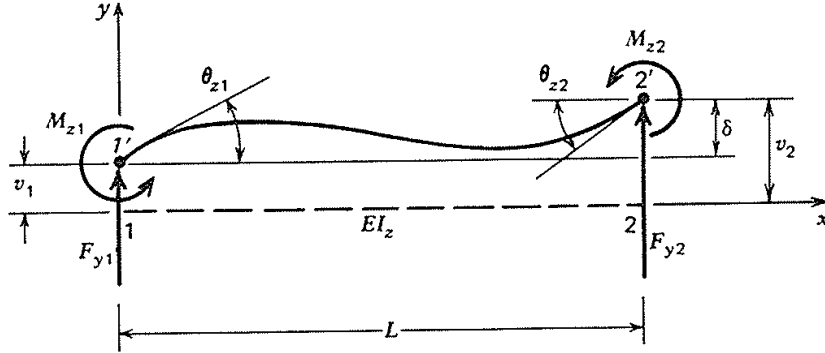
$\bar{M} = -\frac{x}{L}$ となり，仮想仕事式に代入すると，

$$\begin{aligned}\theta_{z2} &= \int_0^L \frac{M_x \bar{M}}{EI_z} dx = \int_0^L \frac{\left(-\frac{M_{z1}}{L}x + M_{z1}\right)\left(-\frac{x}{L}\right)}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^L \left(\frac{M_{z1}}{L^2}x^2 - \frac{M_{z1}}{L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{EI_z} \left[\frac{M_{z1}}{L^2} \left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{M_{z1}}{2L}x^2 \right]_0^L = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{M_{z1}L}{3} - \frac{M_{z1}L}{2} \right] = -\frac{M_{z1}L}{6EI_z} \quad \therefore \theta_{z2} = -\frac{M_{z1}L}{6EI_z}\end{aligned}$$

例題 8

たわみ角法の基本公式¹⁾を用いて、一様断面はりの剛性マトリックスを求めよ。

—— 解答 ——



直線はりは力によって図のように変形する。節点間に荷重はないものとする。部材の“たわみ角法”の方程式は次式で表わされる

$$M_{z1} = \frac{2EI_z}{L}(2\theta_{z1} + \theta_{z2} - 3R)$$

$$M_{z2} = \frac{2EI_z}{L}(\theta_{z1} + 2\theta_{z2} - 3R), \text{ ただし部材角: } R = \delta / L \text{ だから,}$$

$$M_{z1} = \frac{EI_z}{L}\left(4\theta_{z1} + 2\theta_{z2} - \frac{6\delta}{L}\right), \quad M_{z2} = \frac{EI_z}{L}\left(2\theta_{z1} + 4\theta_{z2} - \frac{6\delta}{L}\right)$$

$$v_2 - v_1 = \delta \text{ とおくと}$$

$$M_{z1} = \frac{EI_z}{L}\left(4\theta_{z1} + 2\theta_{z2} + \frac{6v_1}{L} - \frac{6v_2}{L}\right), \quad M_{z2} = \frac{EI_z}{L}\left(2\theta_{z1} + 4\theta_{z2} + \frac{6v_1}{L} - \frac{6v_2}{L}\right)$$

$$2\text{点回りのモーメントのつり合い式から, } -F_{y1}L + M_{z1} + M_{z2} = 0$$

$$\therefore F_{y1} = \frac{M_{z1} + M_{z2}}{L} = \frac{EI_z}{L}\left(\frac{6\theta_{z1}}{L} + \frac{6\theta_{z2}}{L} + \frac{12v_1}{L^2} - \frac{12v_2}{L^2}\right)$$

$$1\text{点回りのモーメントのつり合い式から, } F_{y2}L + M_{z1} + M_{z2} = 0$$

$$\therefore F_{y2} = -\left(\frac{M_{z1} + M_{z2}}{L}\right) = \frac{EI_z}{L}\left(-\frac{6\theta_{z1}}{L} - \frac{6\theta_{z2}}{L} - \frac{12v_1}{L^2} + \frac{12v_2}{L^2}\right)$$

となる。これらをまとめてマトリックス形で表すと、

¹⁾ 撓み角法の基本式については、“撓み角法の基本式の誘導” 参照

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_Z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad \sim (\text{A})$$

一方，軸方向力と軸方向変位の関係は，前提条件で軸力と曲げおよび軸力とせん断の連成効果を無視しているので，次のように表される．

$$F_{x2} = -F_{x1} = (EA/L)(u_2 - u_1) \quad \sim(B)$$

(A),(B)式を 6×6 に拡張して，自由度を水平，鉛直，回転の順に並べ換え，重ね合わせてマトリックス表示すると，以下の様になる．

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix}$$