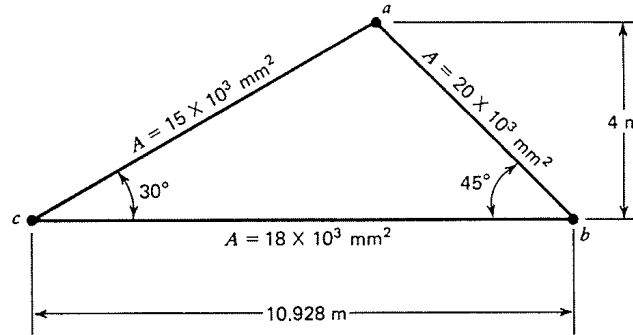


構造解析第7回

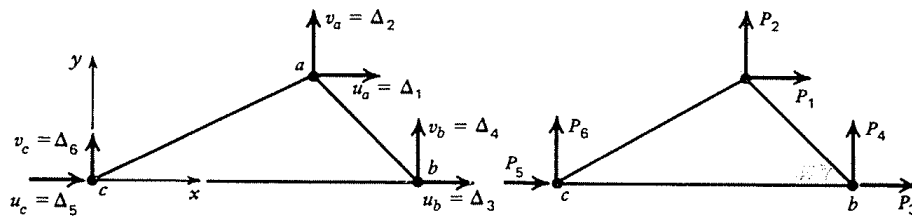
例題5 図に示す骨組について

- (1) 部材の力-変位関係を全体座標系で書け.
- (2) 全体剛性方程式を組み立てよ.
- (3) 全体剛性方程式には剛体運動の項が含まれていることを示せ.
ただし, $E=200\,000\text{ MPa}$ である.



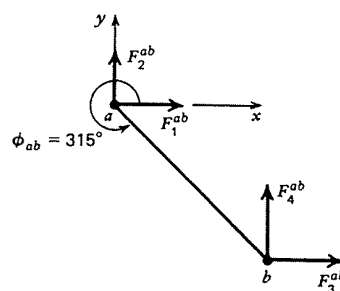
—— 解答 ——

座標軸, 自由度および外力を次図のように定義する.



- (1) 部材の力-変位関係 (式(2.20)参照)

部材 ab

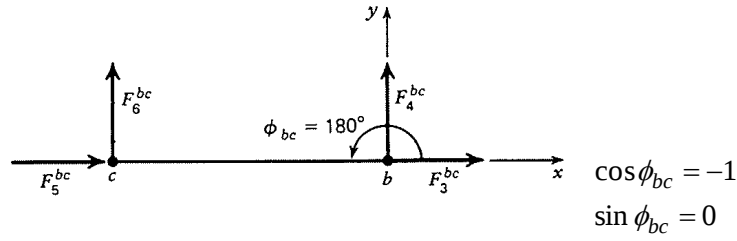


$$\begin{aligned}\cos \phi_{ab} &= 0.707 \\ \sin \phi_{ab} &= -0.707\end{aligned}$$

$$\left(\frac{EA}{L} \right)_{ab} = \frac{200 \times 20 \times 10^3}{4\sqrt{2} \times 10^3} = 707.11 \text{ kN/mm}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{ab} \\ F_2^{ab} \\ F_3^{ab} \\ F_4^{ab} \end{Bmatrix} = 707.11 \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ & & 0.5 & -0.5 \\ \text{sym.} & & & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} = 10^2 \times \begin{bmatrix} 3.536 & -3.536 & -3.536 & 3.536 \\ & 3.536 & 3.536 & -3.536 \\ & & 3.536 & -3.536 \\ \text{sym.} & & & 3.536 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} \quad \sim (1)$$

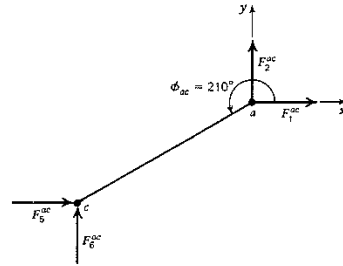
部材bc



$$\left(\frac{EA}{L} \right)_{bc} = \frac{200 \times 18 \times 10^3}{10.928 \times 10^3} = 329.43 \text{ kN/mm}$$

$$\begin{Bmatrix} F_3^{bc} \\ F_4^{bc} \\ F_5^{bc} \\ F_6^{bc} \end{Bmatrix} = 329.43 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & \\ \text{sym.} & & 0 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = 10^2 \times \begin{bmatrix} 3.294 & 0 & -3.294 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 3.294 & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} \quad \sim (2)$$

部材ac



$$\cos \phi_{ac} = -0.866$$

$$\sin \phi_{ac} = -0.5$$

$$\left(\frac{EA}{L} \right)_{ac} = \frac{200 \times 15 \times 10^3}{8 \times 10^3} = 375.00 \text{ kN/mm}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{ac} \\ F_2^{ac} \\ F_5^{ac} \\ F_6^{ac} \end{Bmatrix} = 375.00 \begin{bmatrix} 0.75 & 0.433 & -0.75 & -0.433 \\ & 0.25 & -0.433 & -0.25 \\ & & 0.75 & 0.433 \\ \text{sym.} & & & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} = 10^2 \times \begin{bmatrix} 2.813 & 1.624 & -2.813 & -1.624 \\ & 0.938 & -1.624 & -0.938 \\ & & 2.813 & 1.624 \\ \text{sym.} & & & 0.938 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} \quad \sim (3)$$

(2) 全体剛性方程式は,

$$\begin{Bmatrix} F_1^{ab} + F_1^{ac} \\ F_2^{ab} + F_2^{ac} \\ F_3^{ab} + F_3^{bc} \\ F_4^{ab} + F_4^{bc} \\ F_5^{bc} + F_5^{ac} \\ F_6^{bc} + F_6^{ac} \end{Bmatrix} = 10^2 \times \begin{bmatrix} 3.536 & -3.536 & -3.536 & 3.536 & -2.813 & -1.624 \\ +2.813 & +1.624 & & & & \\ & 3.536 & 3.536 & -3.536 & -1.624 & -0.938 \\ +0.938 & & & & & \\ & & 3.536 & -3.536 & +0 & -3.294 & 0 \\ +3.294 & & & & 3.536 & +0 & 0 & 0 \\ & & & & & 3.294 & 0 & +1.624 \\ & & & & & & +2.813 & 0 & +0.938 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = 10^2 \times \begin{bmatrix} 6.349 & -1.912 & -3.536 & 3.536 & -2.813 & -1.624 \\ & 4.474 & 3.536 & -3.536 & -1.624 & -0.938 \\ & & 6.830 & -3.536 & -3.294 & 0 \\ & & & 3.536 & 0 & 0 \\ & sym. & & & 6.107 & 1.624 \\ & & & & & 0.938 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{Bmatrix} \quad \sim \textcircled{A}$$

(3) 剛体運動を含むことの証明

上式の全体剛性マトリックスの行列式の値が $\det |K|=0$ であり，特異 (singular) となることを示せば良い．この場合，任意荷重の下で変位が ∞ となる．

$$[1\text{行}+3\text{行}]=[2.813 \ 1.624 \ 3.294 \ 0 \ -6.107 \ -1.624]$$

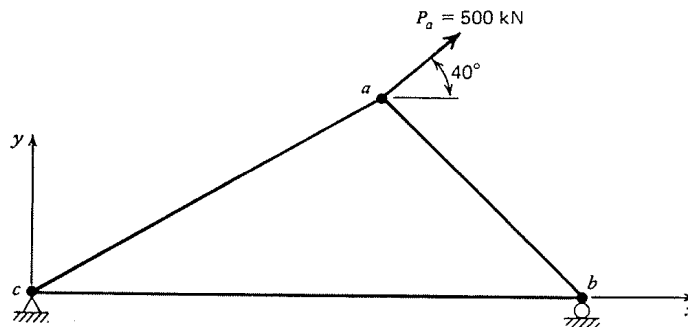
$$[5\text{行}]=- [2.813 \ 1.624 \ 3.294 \ 0 \ -6.107 \ -1.624]$$

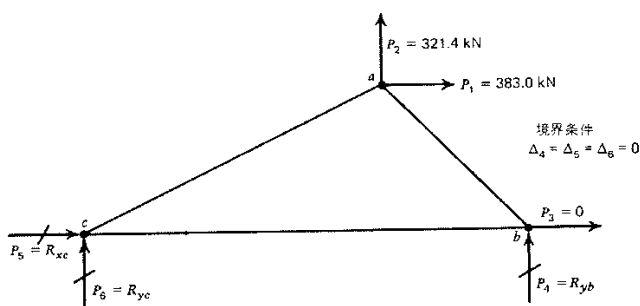
$\therefore$ $[1\text{行}+3\text{行}]=-[5\text{行}]$ となり，線形従属の関係にあるので，上の行列式は特異である．

例題 6

例題 5 のトラスが図のように支持されて荷重が作用している．

- (1) a 点と b 点の変位を計算せよ．
- (2) 反力を計算せよ．
- (3) 棒の力を計算せよ．このとき例題 5 の式を用いて計算せよ．





(1) a点, b点変位の計算

$$P_1 = P_a \cdot \cos 40^\circ = 500 \times 0.766 = 383.0 [kN]$$

$$P_2 = P_a \cdot \sin 40^\circ = 500 \times 0.643 = 321.4 [kN]$$

また, 支点の拘束条件より, $\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$ であるので, 例題5の④式において, 全体剛性方程式を次の様子で書ける.

$$\begin{Bmatrix} 383.0 \\ 321.4 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^2 \times \begin{bmatrix} 6.349 & -1.912 & -3.536 \\ & 4.474 & 3.536 \\ \text{sym.} & & 6.83 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} + 10^2 \times \begin{bmatrix} 3.536 & -2.813 & -1.624 \\ -3.536 & -1.624 & -0.938 \\ -3.536 & -3.294 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_4 = 0 \\ \Delta_5 = 0 \\ \Delta_6 = 0 \end{Bmatrix}$$

右辺第2項=0なので, 最初の第1項のみ考慮して, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ について逆マトリックスを求めて解くと,

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.870 \\ 1.2427 \\ -0.1929 \end{Bmatrix} [mm] \quad \leftarrow \text{Matl} \text{で計算}$$

(2) 反力の計算

同様に先の全体方程式を参照すると,

$$\begin{Bmatrix} P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix} = 10^2 \times \begin{bmatrix} 3.536 & -3.536 & -3.536 \\ -2.813 & -1.624 & -3.294 \\ -1.624 & -0.938 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 = 0.87 \\ \Delta_2 = 1.243 \\ \Delta_3 = -0.193 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -63.6 \\ -383.4 \\ -258.1 \end{Bmatrix} [kN]$$

↑

(反力に一致)

(3) 棒の力の計算

部材応力は要素剛性方程式から計算されるので, 前問例題5の(1)式から
部材ab

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_1^{ab} \\ F_2^{ab} \end{Bmatrix} &= 707.11 \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} + 707.11 \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix} \\ &= 707.11 \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.870 \\ 1.2427 \end{Bmatrix} + 707.11 \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1929 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} -63.6 \\ 63.6 \end{Bmatrix} [kN] \end{aligned}$$

$$\therefore F_{ab} = F_2^{ab} \cdot \sqrt{2} = 90 [kN] \quad (\text{引張り})$$

部材bc

(2) 式より,

$$\begin{Bmatrix} F_3^{bc} \\ F_4^{bc} \end{Bmatrix} = 329.43 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 = 0 \end{Bmatrix} = 329.43 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1929 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -63.6 \\ 0 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$\therefore F_{bc} = F_3^{bc} = -63.6[kN] \text{ (圧縮)}$$

部材 ac

(3)式より,

$$\Delta_1 \quad \Delta_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1^{ac} \\ F_2^{ac} \end{Bmatrix} = 375.00 \begin{bmatrix} 0.750 & 0.433 \\ 0.433 & 0.250 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.870 \\ 1.2427 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 446.5 \\ 257.8 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

$$F_{ac} = F_1^{ac} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = +515.5kN \quad (\text{引張り})$$

