構造解析　第６回

３．全体剛性方程式の組み立てと解法

3.1　全体剛性方程式

全体剛性方程式は，節点番号順に節点に連結する部材の剛性方程式を重ね合わせ組み立てる．その際，節点における力の釣合条件，変位の適合条件を考慮する．全体剛性方程式の元数は全自由度数に等しく，これには剛体運動を拘束する支点の自由度数も含まれる．

力の釣合条件～節点に作用する外力 P_i は，その節点に連結する部材 A,B,C, ...の力

$F_i^A, F_i^B, F_i^C, \cdots$ の総和に等しい．

即ち，$$P_i = F_i^A + F_i^B + F_i^C + \cdots \qquad \sim(3.1)$$

変位の適合条件～節点変位 Δ_i は，その節点に連結する部材 A,B,C, ...の変位

$\Delta_i^A, \Delta_i^B, \Delta_i^C, \cdots$ に等しい．

即ち，$$\Delta_i = \Delta_i^A = \Delta_i^B = \Delta_i^C = \cdots \qquad \sim(3.2)$$

例題 3.1

下図に示す平面トラスを例に全体剛性方程式の組み立て方を示せ．

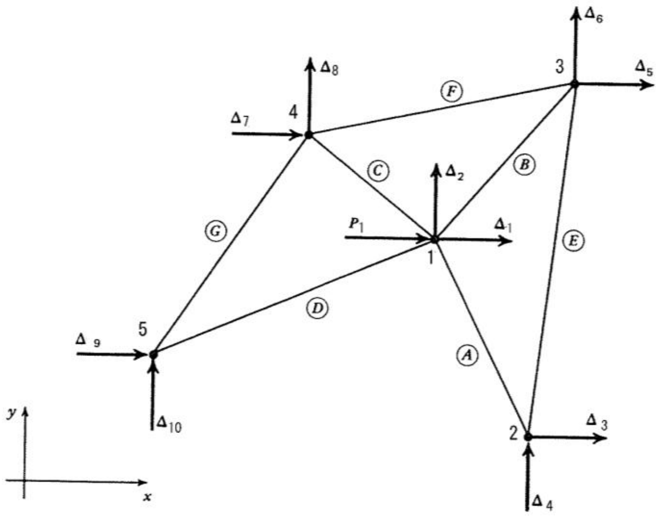


図　3-1　平面トラス

ｉ）節点１の x 方向力について

各部材の要素剛性は，全体座標系表示されているとして以下に式を展開する．Ⓐ部材を例に，(2.20)式の要素剛性を k_{ij}，荷重ベクトル，変位ベクトルを夫々

$$\lfloor F_{x1}\, F_{y1}\, F_{x2}\, F_{y2} \rfloor^T = \lfloor F_1\, F_2\, F_3\, F_4 \rfloor^T,$$

$$\lfloor u_1\, v_1\, u_2\, v_2 \rfloor^T = \lfloor \Delta_1\, \Delta_2\, \Delta_3\, \Delta_4 \rfloor^T$$

で置き換えると，

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}$$

Ⓐ部材について：　$F_1^A = k_{11}^A\Delta_1^A + k_{12}^A\Delta_2^A + k_{13}^A\Delta_3^A + k_{14}^A\Delta_4^A$

Ⓑ部材について：　$F_1^B = k_{11}^B\Delta_1^B + k_{12}^B\Delta_2^B + k_{15}^B\Delta_5^B + k_{16}^B\Delta_6^B$

Ⓒ部材について：　$F_1^C = k_{11}^C\Delta_1^C + k_{12}^C\Delta_2^C + k_{17}^C\Delta_7^C + k_{18}^C\Delta_8^C$

Ⓓ部材について：　$F_1^D = k_{11}^D\Delta_1^D + k_{12}^D\Delta_2^D + k_{19}^D\Delta_9^D + k_{110}^D\Delta_{10}^D$

節点１におけるｘ方向の力の釣合条件より，

$$
\begin{aligned}
P_1 &= F_1^A + F_1^B + F_1^C + F_1^D \\
&= (k_{11}^A\Delta_1^A + k_{12}^A\Delta_2^A + k_{13}^A\Delta_3^A + k_{14}^A\Delta_4^A) + (k_{11}^B\Delta_1^B + k_{12}^B\Delta_2^B + k_{15}^B\Delta_5^B + k_{16}^B\Delta_6^B) \\
&\quad + (k_{11}^C\Delta_1^C + k_{12}^C\Delta_2^C + k_{17}^C\Delta_7^C + k_{18}^C\Delta_8^C) + (k_{11}^D\Delta_1^D + k_{12}^D\Delta_2^D + k_{19}^D\Delta_9^D + k_{110}^D\Delta_{10}^D)
\end{aligned}
$$

節点１におけるｘ方向変位の適合条件より，$\Delta_1^A = \Delta_1^B = \Delta_1^C = \Delta_1^D = \Delta_1$，$\Delta_2^A = \Delta_2^B = \Delta_2^C = \Delta_2^D = \Delta_2$ と置ける．$\Delta_3 \sim \Delta_{10}$ についても同様である．更に全体剛性の要素を K_{ij} と置き，上式を書き換えると，

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (k_{11}^A + k_{11}^B + k_{11}^C + k_{11}^D)\Delta_1 + (k_{12}^A + k_{12}^B + k_{12}^C + k_{12}^D)\Delta_2 + k_{13}^A\Delta_3 + k_{14}^A\Delta_4 \\
&\quad + k_{15}^B\Delta_5 + k_{16}^B\Delta_6 + k_{17}^C\Delta_7 + k_{18}^C\Delta_8 + k_{19}^D\Delta_9 + k_{110}^D\Delta_{10} \\
&= K_{11}\Delta_1 + K_{12}\Delta_2 + K_{13}\Delta_3 + K_{14}\Delta_4 + \cdots + K_{110}\Delta_{10}
\end{aligned}
$$

ⅱ）節点１のｙ方向力について

Ⓐ部材について：　$F_2^A = k_{21}^A\Delta_1^A + k_{22}^A\Delta_2^A + k_{23}^A\Delta_3^A + k_{24}^A\Delta_4^A$

Ⓑ部材について：　$F_2^B = k_{21}^B\Delta_1^B + k_{22}^B\Delta_2^B + k_{25}^B\Delta_5^B + k_{26}^B\Delta_6^B$

Ⓒ部材について：　$F_2^C = k_{21}^C\Delta_1^C + k_{22}^C\Delta_2^C + k_{27}^C\Delta_7^C + k_{28}^C\Delta_8^C$

Ⓓ部材について：　$F_2^D = k_{21}^D\Delta_1^D + k_{22}^D\Delta_2^D + k_{29}^D\Delta_9^D + k_{210}^D\Delta_{10}^D$

節点１におけるｙ方向の力の釣合条件より，外力はｙ方向に作用していないので，

$$
\begin{aligned}
0 &= F_2^A + F_2^B + F_2^C + F_2^D \\
&= (k_{21}^A\Delta_1^A + k_{22}^A\Delta_2^A + k_{23}^A\Delta_3^A + k_{24}^A\Delta_4^A) + (k_{21}^B\Delta_1^B + k_{22}^B\Delta_2^B + k_{25}^B\Delta_5^B + k_{26}^B\Delta_6^B) \\
&\quad + (k_{21}^C\Delta_1^C + k_{22}^C\Delta_2^C + k_{27}^C\Delta_7^C + k_{28}^C\Delta_8^C) + (k_{21}^D\Delta_1^D + k_{22}^D\Delta_2^D + k_{29}^D\Delta_9^D + k_{210}^D\Delta_{10}^D)
\end{aligned}
$$

先と同様，節点１におけるｙ方向変位の適合条件を考慮すると，上式は

$$
\begin{aligned}
0 &= (k_{21}^A + k_{21}^B + k_{21}^C + k_{21}^D)\Delta_1 + (k_{22}^A + k_{22}^B + k_{22}^C + k_{22}^D)\Delta_2 + k_{23}^A\Delta_3 + k_{24}^A\Delta_4 \\
&\quad + k_{25}^B\Delta_5 + k_{26}^B\Delta_6 + k_{27}^C\Delta_7 + k_{28}^C\Delta_8 + k_{29}^D\Delta_9 + k_{210}^D\Delta_{10} \\
&= K_{21}\Delta_1 + K_{22}\Delta_2 + K_{23}\Delta_3 + K_{24}\Delta_4 + \cdots + K_{210}\Delta_{10}
\end{aligned}
$$

節点１の重ね合わせ操作までを具体的にマトリックス形式で表示すると，

$$
\begin{bmatrix}
(k_{11}^A + k_{11}^B + k_{11}^C + k_{11}^D) & (k_{12}^A + k_{12}^B + k_{12}^C + k_{12}^D) & k_{13}^A & k_{14}^A & \cdots & k_{110}^D \\
(k_{21}^A + k_{21}^B + k_{21}^C + k_{21}^D) & (k_{22}^A + k_{22}^B + k_{22}^C + k_{22}^D) & k_{23}^A & k_{24}^A & \cdots & k_{210}^D \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \vdots \\ \Delta_{10} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} F_1^A + F_1^B + F_1^C + F_1^D \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix}
$$

$$\therefore\quad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & \cdots & K_{110} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & \cdots & K_{210} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \vdots \\ \Delta_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \qquad \sim(3.3)$$

節点１の終了段階では，自由度Δ_1とΔ_2に関する部分マトリックス$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$のみが重ね合わせ完了状態であり，その他の$K_{ij}$は重ね合わせ未完了の状態である．以下同様に重ね合わせ操作を後続節点について実行し，全体剛性方程式を組み立てる．

説明終了

3.2　全体剛性方程式の解法（理論式表示）

全節点について重ね合わせが完了した段階では境界条件が考慮されていない．境界条件とは構造物を外的に拘束する条件のことで，具体的には支点の変位を０に拘束することや支点に強制変位を与えることである．境界条件を導入すること無しに(3.3)式を解くならば，得られる変位は剛体変位を含む異常に大きな誤った値となる．これは全体剛性マトリックスが逆行列の存在しない特異行列であることに拠る．

正しい変位は，境界条件導入後に得られる．計算式で表示するには便宜上，自由節点（添字 f:free）と支持節点（添字 s:suport）に対応する行列を次の様にひとくくりに区切ると分かり易い[1)]．

先ず，(3.3)式を簡潔に次式で表す．

$$[K]\{\Delta\}=\{P\} \qquad \sim(3.4)$$

上式を次のように自由節点と支持節点の自由度に分け，次の様に表示する．

$$\begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_f \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_f \\ P_s \end{Bmatrix} \qquad \sim(3.5)$$

ここで$\{P_s\}$は反力，$\{\Delta_s\}=0$であるので，これに対応する行列を削除すると，残された式は自由節点に関する式のみとなる．

$$[K_{ff}]\{\Delta_f\}=\{P_f\} \qquad \sim(3.6)$$

この$[K_{ff}]$は逆行列の存在する正則マトリックスであり，変位は次式で得られる．

$$\{\Delta_f\}=[K_{ff}]^{-1}\{P_f\} \qquad \sim(3.7)$$

支持点の反力は，$\{\Delta_f\}$を用いて次式で表せる．

$$\{P_s\}=[K_{sf}]\{\Delta_f\} \qquad \sim(3.8)$$

なお，部材iに作用する節点力成分$\{F^i\}$は，その要素に関連する節点自由度$\{\Delta^i\}$のみ取り出し，次式で得られる．

$$\{F^i\}=[K^i]\{\Delta^i\} \qquad \sim(3.9)$$

上式は全体座標系で表示された節点力成分であるので，部材端荷重（部材端力）を得るた

1) 実務で扱う構造物では，(3.5)式の様に区切るには多数回の行列の並べ替えが必要となり計算負荷がかかる。それ故，(3.4)式のままで強制的に拘束変位を０とするテクニックを導入し，変位を求めている。

めにこれを局部座標系に変換する．最終的に，軸力などの部材応力を得るには，部材端荷重の符号の規約と部材応力（軸力，せん断力，曲げモーメント）の符号の規約の相違に留意する．

符号の規約とは，符号の正方向を決める際の約束事であり，それが理論式とプログラム内で首尾一貫していれば，どの様に決めても良い．ただし通常，部材応力の符号の規約については，慣例に従う．

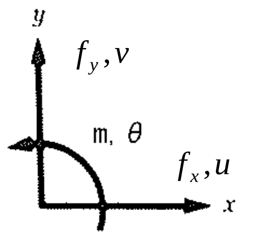
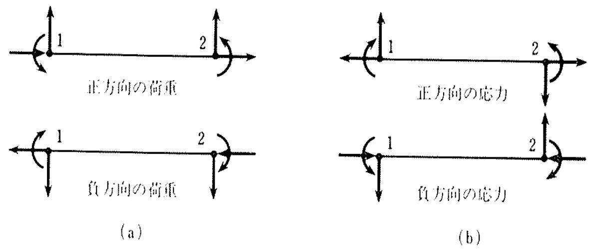


図　3-2　部材端荷重,変位の正方向



(a) 部材端荷重　　(b) 部材応力

図　3-3　部材端荷重と部材応力の符号の規約

例題 5
例題 6
演習問題 4
演習問題 5
演習問題 6(a),(b)

3.3 全体剛性方程式の解法（Gauss の消去法による多元連立 1 次方程式の解法）

構造物の剛性方程式は，次式で表せる．

$$[K]\{x\} = \{F\}$$

ただし，$[K]$：剛性マトリックス，$\{x\}$：変位ベクトル，$\{F\}$：外力ベクトル

$[K]$の大きさを(n,n)とすると，次数は n 次元であり，変位ベクトル$\{x\}$は x の 1 乗項のみで構成され 2 乗以上の項はない．この様な方程式を多元連立 1 次方程式と呼ぶ．記号を換えれば，これは次の見慣れた式と同じである．

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \qquad \Rightarrow \qquad [A]\{x\} = \{y\} \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

$[K]$，$\{F\}$が与えられて既知，$\{x\}$を未知数とすると，条件式が n 個，未知数が n 個となり，この多元連立 1 次方程式を解くことができる．未知数$\{x\}$は，記号で簡潔に表記すると，$[K]\{x\} = \{F\}$の両辺に$[K]^{-1}$を左乗積して，次の様に表現できる．

$$\{x\} = [K]^{-1}\{F\}$$

元数が小さい場合には，$[K]^{-1}$を直接求めてもよいが，元数が大きくなると$[K]^{-1}$の計算負荷が著しく増大する．また，構造物の剛性マトリックスは，主対角要素を挟んだある幅（これをバンド幅と呼ぶ）の外側にある全ての要素の値が 0 であるので，これらの特徴を考慮した様々な実用的計算法が提案されている．

以下に，代表的な数値計算法であるガウスの消去法を示す.

ガウスの消去法

この計算法では，前進消去により上三角マトリックスを形成する様に変形し，後退代入計算で未知数の列ベクトルを下から順に求める．以下に４元の例を示す.

４元連立１次方程式の Gauss の消去法計算例：

Gauss の消去法を用いて，次の４元連立１次方程式の解を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(1) 前進消去：　上三角マトリックスに変形する手続き

ステップ１:　第１行の対角要素より下の第１列要素が全て０となる様に変形する．２行目の式を例に示せば，

$$\text{新たな２行目の式＝２行目の式} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \times \text{１行目の式}$$

となる．連立方程式を $[a_{ij}]\{U\}=\{b\}$ と表すならば，２行目の式変形は，

$$\left(a_{21}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{11}\right)U_1+\left(a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)U_2+\cdots+\left(a_{2n}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)U_n=\left(b_2-\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1\right)$$

と表せる．このとき，右辺の列ベクトルも同様に変形する。引き続き 3, 4 行目も同様に変形すると，

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & 1 \\ 0 & -\frac{16}{5} & \frac{29}{5} & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ステップ２：　第２行の対角要素より下の要素が０となるように変形する。
変形の考え方は，上記に同じ（以下同様）

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{7} & \frac{65}{14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{7} \\ -\frac{5}{14} \end{Bmatrix}$$

ステップ３：　第３行の対角要素より下の要素が０となるように変形する。

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{5} & -\frac{16}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{15}{7} & -\frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{7} \\ \frac{7}{6} \end{Bmatrix}$$

(2) 後退代入：　最終行の未知変位を先ず求め，次いで下の行から逆順に未知数を求める手続き

$$U_4 = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{7}{5} \quad ; \quad U_3 = \frac{\frac{8}{7} - (-\frac{20}{7})U_4}{\frac{15}{7}} = \frac{12}{5}$$

$$U_2 = \frac{1 - (-\frac{16}{5})U_3 - (1)U_4}{\frac{14}{5}} = \frac{13}{5} \quad ; \quad U_1 = \frac{0 - (-4)\frac{13}{5} - (1)\frac{12}{5} - (0)\frac{7}{5}}{5} = \frac{8}{5}$$