

構造解析 第2回

(2) トラス部材の力～変位関係

個々の部材，要素をひとつ取り上げた関係式，即ち

部材端荷重～部材端変位関係式

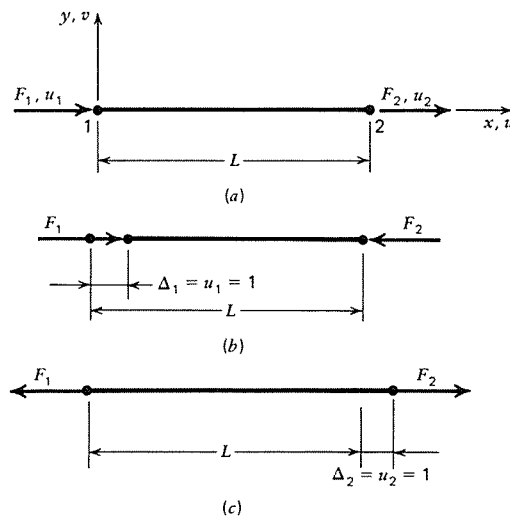
を局所座標系で表す．表現の仕方は通常2通り．

① 要素剛性方程式 : $\{F\} = [k]\{\Delta\}$ ～(A)

② 要素撓み性方程式 : $\{\Delta_f\} = [d]\{F_f\}$ ～(B)

ここで， $\{F\}$ ：要素の力， $[k]$ ：要素剛性マトリックス， $\{\Delta\}$ ：要素変位，
下付文字 f ：自由節点を意味する free の頭文字

2.1 1次元トラス部材の要素剛性方程式（局所座標系表示）



(a) 軸力要素，(b) 節点1に単位変位を与えた場合，(c) 節点2に単位変位を与えた場合
(b)図において F_2 は反力 (c)図において F_1 は反力

図 2-3 1次元トラス部材

上図の場合， y 方向の分力は存在せず，剛性方程式（または構成方程式と呼称）は x 方向のみの1自由度で，次の様に表示される．

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \sim(2.1)$$

要素剛性マトリックスの各要素 k_{ij} は要素剛性係数 (element stiffness coefficient) と呼ばれ，その定義は次の通り．

要素剛性係数の定義：微小変形と弾性を仮定した力の釣合条件の下で，自由度 i に単位変位を与え，他の全ての自由度を拘束したとき，
 k_{ii} → 自由度 i に単位変位を引き起こすために必要な自由度 i 方向の力
 加力方向に変位するので，対角要素 k_{ii} の符号は必ず正
 k_{ji} → 自由度 i に単位変位を与えたときに生ずる，自由度 j 方向の反力
 添字の意味： k 力／反力，単位変位を与える自由度
 トラスの場合，材端モーメント，回転角に該当する項を含まない。

図 2-3 の具体的な要素剛性の算定

i) u_1 方向に単位変位 $u_1 = 1$ を与えた場合

$u_1 = 1$ 以外の他の変位を固定, 即ち $u_2 = 0$ とすると, $F_1 = k_{11} \cdot 1 + k_{12} \cdot 0 \quad \therefore F_1 = k_{11}$

これより k_{11} は, $u_1 = 1$ の単位変位を生じさせるのに必要な力

$$\text{弾性を仮定すると, } \sigma = E\varepsilon \text{ より, } \frac{F_1}{A} = E \frac{1}{L} \quad \therefore F_1 = k_{11} = \frac{EA}{L} \quad \sim(2.2)$$

ただし, σ : 応力度, ε : 歪度, A : 部材の断面積

$F_2 = k_{21} \cdot 1 + k_{22} \cdot 0 \quad \therefore F_2 = k_{21}$, これより k_{21} は, $u_1 = 1$ の単位変位が生じたときの 2 点の反力に等しい. 力の釣合式 $F_1 + F_2 = 0$ から,

$$F_1 + F_2 = (k_{11} + k_{21}) \cdot 1 + (k_{12} + k_{22}) \cdot 0 = k_{11} + k_{21} = 0$$

即ち, 1 列目の要素剛性係数の和が, 力の釣合式を表している.

$$\text{上式と(2.2)式より, } k_{21} = -k_{11} = -\frac{EA}{L} \quad \sim(2.3)$$

ii) u_2 方向に単位変位 $u_2 = 1$ を与えた場合

$u_2 = 1$ 以外の他の変位を固定, 即ち $u_1 = 0$ とすると, $F_2 = k_{21} \cdot 0 + k_{22} \cdot 1 \quad \therefore F_2 = k_{22}$

これより k_{22} は, $u_2 = 1$ の単位変位を生じさせるのに必要な力

$$\text{弾性を仮定すると, } \sigma = E\varepsilon \text{ より, } \frac{F_2}{A} = E \frac{1}{L} \quad \therefore F_2 = k_{22} = \frac{EA}{L} \quad \sim(2.4)$$

$F_1 = k_{11} \cdot 0 + k_{12} \cdot 1 \quad \therefore F_1 = k_{12}$, これより k_{12} は, $u_2 = 1$ の単位変位が生じたときの 1 点の反力に等しい. 力の釣合式 $F_1 + F_2 = 0$ から,

$$F_1 + F_2 = (k_{11} + k_{21}) \cdot 0 + (k_{12} + k_{22}) \cdot 1 = k_{12} + k_{22} = 0$$

即ち, 先と同様 2 列目の要素剛性係数の和が, 力の釣合式を表している.

$$\text{上式と(2.4)式より, } k_{12} = -k_{22} = -\frac{EA}{L} \quad \sim(2.5)$$

(2.2)~(2.5)式を(2.1)式に代入すると,

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \sim(2.6)$$

注) 変形(deformation)と変位(displacement)の使い分け

通常, 変形は相対変位, 変位は絶対変位 (=相対変位+剛体変位) を意識して使う.

$\therefore$ 剛体変位 = 0, 即ち剛体変位が拘束されている場合には, 変形と変位は同じ意味となる.

2.2 要素撓み性方程式

要素剛性方程式 $\{F\} = [k]\{\Delta\}$ に $[k]^{-1}$ を左乗積すると, $[k]^{-1}\{F\} = [k]^{-1}[k]\{\Delta\}$

$$\therefore \{\Delta\} = [k]^{-1}\{F\} = [d]\{F\} \quad \sim(2.7)$$

ただし, $[d] = [k]^{-1}$: 撓み性マトリックス(flexibility matrix)

要素撓み性係数を誘導すると,

$$[d]=[k]^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}^{-1}=\left(\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

右辺 () 内の行列式の値が、 $\det[d]=\frac{EA}{L}(1-1)=0$ となり、要素剛性マトリックスの逆行列 $[k]^{-1}$ を定義できない。即ち、逆行列が存在しない。∴ 部材端変位が求まらない。

逆行列が存在しない行列を**特異 (singular) 行列**、逆行列が存在する行列を**正則 (regular) または nonsingular 行列**と呼ぶ。

特定の部材端荷重の組み合わせに対して部材端変位を一意に定めるには、剛体変位を外的に拘束しなければならない。

以上要約すると、

逆行列が存在しない ⇔ 任意の剛体変位が含まれ、部材端変位が一意に定まらない。
逆行列が存在する ⇔ 剛体変位が止められ、部材端変位が一意に定まる。

剛体変位は、外的な拘束、即ち**境界条件**を系に与えて、例えば支点の自由度を拘束する等して止められる。先の(B)式： $\{\Delta_f\}=[d]\{F_f\}$ は、(2.7)式から拘束された支点の自由度を除いた自由節点(添え字 f: free) のみの項で構成されていることを意味し、この場合には $[d]$ が求まる。即ち、撓み性方程式は剛体運動が生じない様、安定に静定支持された部材に対してのみ成立する。

節点 2 を仮に拘束したとして、 F_2 と $\Delta_2 = u_2$ に関する行、列を除外すると、(B)式に相当する撓み性方程式は、 $\{\Delta_1\}=\left[\frac{EA}{L}\right]^{-1}\{F_1\}=\left[\frac{L}{EA}\right]\{F_1\}$ ～(2.8)

となり、撓み性係数は自由節点に関する剛性行列のサブマトリックス $[k_{ff}]$ の逆行列として定義できる。

例題 1, 例題 2, 演習問題 1