

行列演算の基礎（２）：逆行列

（１） 逆行列(inverse matrix)

正方行列 $[A]$ に対し

$$[A][B] = [I], \quad \text{ただし } [I] \text{ は単位マトリックス}$$

となる正方行列が存在するとき、 $[B]$ を $[A]$ の逆行列或いは逆マトリックスと呼び、

$$[B] = [A]^{-1}$$

と表現する． $\therefore [A][A]^{-1} = [I]$ である．逆行列は逆数を拡張した概念に相当する．

次に、逆行列の要素がどの様に誘導されるのか検討する．これを理解するには、行列式(determinant)と随伴マトリックス(adjoint matrix)を把握する必要がある．

a) 行列式

行列式は通常、 $\det[A]$ 、 $\det[a_{ij}]$ 或いは $|A|$ 、 $|a_{ij}|$ と表現する．

行列は単に配置を表しているにすぎないが、行列式は値を有する．その値が 0 に等しい場合を特異(singular)、0 に等しくない場合を正則(regular)であるという．

$$\text{特異： } \det[A] = 0$$

$$\text{正則： } \det[A] \neq 0$$

b) 随伴マトリックス

n 次の行列式 $|a_{ij}|$ から、要素 a_{ij} を含む i 行と j 列を削除して得られる $(n-1)$ 次の行列式を要素 a_{ij} に属する小行列式(minor determinant)と呼び、更に a_{ij} の要素位置によって定まる正負の符号 $(-1)^{i+j}$ を付加したものを要素 a_{ij} の余因数或いは余因子(cofactor)と呼んで、これを A_{ij} で表す． A_{ij} は小行列式に符号を付加したもののなので、値を有する．したがって、正方行列 $[A] = [a_{ij}]$ の各要素には、それぞれ 1 つずつの余因数 A_{ij} が存在し、正方行列の各要素の代わりに余因数を当てた行列 $[A_{ij}]$ を転置した新たな行列 $[A_{ij}]^T$ を定義できる．この新たな転置行列を正方行列 $[A]$ の随伴マトリックスと呼び、記号 $adj[A]$ で表す．

$$\text{随伴マトリックス： } adj[A] = [A_{ij}]^T$$

c) 逆行列の誘導

先ず、正方行列 $[A]$ の行列式の値を、 $\det[A] = D$ と置く．行列式の展開定理によれば、行列式 D の値は 1 つの行、或いは 1 つの列の各要素とそれらの余因数の積の和として表される．このことを示すために、3 次の行列式の展開例を掲げる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

において、第 1 行の要素 a_{11}, a_{12}, a_{13} で括ると、

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad \sim (1)$$

となり、第 1 行の要素に関する線形結合として表現できる。

同様に第 2 行の要素 a_{21}, a_{22}, a_{23} に対して、

$$a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \quad \sim(2)$$

同様に第 3 行の要素 a_{31}, a_{32}, a_{33} に対して、

$$a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + a_{32}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad \sim(3)$$

と表現できる。上式は次の様にも表せる。

$$\begin{aligned} & a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ & a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ & a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32}(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

更に簡潔に a_{ij} の係数を A_{ij} と置けば、上の行列式は、

$$\begin{aligned} & a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{aligned} \quad \sim(4)$$

したがって、上式は下式で表した行列の積の要素であるとも表現できる。

$$[A](adj[A]) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T \quad \sim(5)$$

A_{ij} を要素 a_{ij} の余因数として n 次元に一般化して記述すれば、

$$i \text{ 行要素による展開: } a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = D \quad \sim(a)$$

以上のことは、行列式の展開項を列の要素で括って(1)～(5)式相当を導いても次の同様の表現が得られる。

$$j \text{ 列要素による展開: } a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = D \quad \sim(b)$$

ここで(a)式の i 行要素を k 行要素で置き換え、余因数はそのままとすると、

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in}$$

と表せ、先の 3 次の例において、(1)式の 1 行目要素を 2 行目要素で置き換えると、

$$a_{21}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{22}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{23}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = 0$$

となることは明らかである。これは(b)式の列の展開式についても当てはまるので、(a),(b)の展開式を補足する次式を得る。

$$i \neq k \text{ のとき, } a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0 \quad \sim(c)$$

$$j \neq \ell \text{ のとき, } a_{1\ell}A_{1j} + a_{2\ell}A_{2j} + \cdots + a_{n\ell}A_{nj} = 0 \quad \sim(d)$$

ところで、(a),(c)式の左辺は、3 次の例から類推できる様に、 n 次元に一般化しても行列の積 $[A](adj[A])$ の要素、(b),(d)式の左辺は、列の要素で括った(4)式相当から積 $(adj[A])[A]$ の要素となっていることが分かる。

$$[A](adj[A]) = (adj[A])[A] = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D \end{bmatrix} = D \cdot [I]$$

$D \neq 0$, 即ち正方行列 $[A]$ が正則であるならば, 上式を $\det[A] = D$ で割れて,

$$[A] \frac{adj[A]}{\det[A]} = \frac{adj[A]}{\det[A]} [A] = [I]$$

上式を $[A][A]^{-1} = [I]$ と比較すると, 逆行列は次式で表せる.

$$[A]^{-1} = \frac{adj[A]}{\det[A]}$$

定理 4 転置行列の逆行列は, 逆行列の転置に等しい.

証明: $[A][A]^{-1} = [I]$ の両辺を転置すれば, 2 重積の転置公式より

$$([A]^{-1})^T [A]^T = [I] \text{ となる. 一方, } ([A]^T)^{-1} [A]^T = [I] \text{ であるから, 2 つの式を比較すると, } ([A]^T)^{-1} = ([A]^{-1})^T$$

定理 5 対称行列の逆行列は, 対称行列である.

証明: 対称行列の定義より, 対称行列の転置は元の対称行列に等しいので,

$$[A]^T = [A] \text{ である. この式を } ([A]^T)^{-1} = ([A]^{-1})^T \text{ 式左辺の括弧内に考慮すると, } [A]^{-1} = ([A]^{-1})^T \text{ となり, これは対称行列の逆行列は, 対称行列であることを表している.}$$

定理 6 主対角要素が全て 0 でない対角行列の逆行列は, 主対角要素の逆数を主対角要素とする対角行列である.

$$\text{例: } \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c_3 \end{bmatrix}$$

例題 1

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ の逆行列を求めよ.}$$

$$\text{解: } \det[A] = 3 - 8 + 9 - 6 + 18 - 2 = 14$$

随伴マトリックスの各要素は, 次の通り.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\therefore \text{随伴マトリックスは, } adj[A] = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -5 & -3 & -9 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [A]^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 \\ -5 & -3 & -9 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.357 & -0.214 & -0.643 \\ -0.071 & 0.357 & 0.071 \end{bmatrix}$$

例題 2

対称行列 $[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めよ.

解: $\det[A] = 32 - 2 - 4 = 26$

随伴マトリックスの各要素は, 次の通り.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

$$\therefore \text{随伴マトリックスは, } adj[A] = [A_{ij}]^T = \begin{bmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [A]^{-1} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 15 & -4 & 1 \\ -4 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

問 1 行列式の展開項は, 列の要素で括ったとき, $(adj[A])[A]$ の要素となっていることを誘導せよ.