行列演算の基礎（１）：正方行列，対称行列，転置行列，行列の積

マトリックス構造解析の理論式は，行列式を用いて表現すると，簡潔で理解し易い．行列式の演算は数学の分野では線形代数学で取り扱われているが，この講義においてはマトリックス構造解析を理解するための必要最小限の事柄；正方行列，対称行列，転置行列，行列の積，逆行列について解説する．

マトリックス(matrix)とは，要素の方形配置(array)を意味し，行列とも呼ばれる．
例えば，m×n 個の要素 a_{ij} を次の様に表す．

$$[A]=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

横方向の並びを行，縦方向の並びを列と呼ぶ．
第１添字 i は行，第２添字 j は列を意味する．

個々の要素は，数値，変数，関数，数式，それ自体がマトリックスのいずれであってもよい．次元や単位が等しい量である必要もない．慣用的な表現方法として，全体を対象とする場合には $[A]$ と大文字を用い，個々の要素に焦点を当てる場合には $\left[a_{ij}\right]$ と小文字で表すことが多い．

特殊な例として，１行×ｎ列の行列を行ベクトル，ｎ行×１列の行列を列ベクトルと呼ぶ．構造解析における剛性方程式で導入される外力，変位はいずれも列ベクトルで表現される．それ故力の釣り合い式を論ずる場合には，外力ベクトル，変位ベクトルと呼ばれる．更に，１行×１列の行列をスカラ(scalar)と呼ぶ．

（１） 正方行列(square matrix)

行と列の数が等しい行列を正方行列或いは正方マトリックスと呼ぶ．ｎ×ｎのマトリックスをｎ次マトリックスと呼ぶこともある．

４次の例：
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 5 \\ 8 & 2 & 8 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

斜線上の要素の並びを主対角要素(main diagonal element)，斜線のことを主対角線(main diagonal)と呼ぶ．主対角線上にない要素を非対角要素(off-diagonal element)と呼ぶ．主対角要素は a_{ii} と表わす．

特殊な例として，非対角要素の全ての要素が０で，主対角要素が０でない行列を対角マトリックス(diagonal matrix)と呼ぶ．

対角マトリックスの例：
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

更に対角マトリックスの主対角要素が全て１である行列を単位マトリックス(identity matrix または unit matrix)と呼ぶ．

単位マトリックスの例：
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

単位マトリックスは，通常記号$[I]$を用いて表す．

（２） 対称行列(symmetric matrix)

主対角線に対して線対称の位置にある要素が，互いに等しい正方行列を対称行列或いは対称マトリックスと呼ぶ．即ち，$a_{ij}=a_{ji}$の関係が成立している．

例：
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

構造解析における剛性方程式で導入される剛性マトリックスは，常に正方で対称な行列となっており，これを正方対称行列と呼んでいる．更に剛性マトリックスの主対角要素は常に正の符号を有している．

（３） 転置行列(transposed matrix)

マトリックスの行と列を交換すること（具体的には，１行目は１列目に，２行目は２列目に，以下同様に交換）を転置といい，転置された行列を転置行列或いは転置マトリックスと呼ぶ．$[A]$の転置は，$[A]^T$と表す．要素で表現するならば，要素a_{ij}を要素a_{ji}とする行列が転置行列である．

転置の例：
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 8 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \\ 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

転置行列の転置は，元の行列に戻る．即ち，$\left([A]^T\right)^T=[A]$である．

また，$[A]$が対称行列ならば，$[A]^T=[A]$である．

更に，列ベクトルの転置は行ベクトルに，行ベクトルの転置は列ベクトルとなる．それ故，外力ベクトル，変位ベクトルは列ベクトルであるが，紙面を節約するために行ベクトルの転置を用いて次の様に表現されることがある．

外力ベクトルの例：　$\lfloor f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \rfloor^T$

（４） 行列の積

行列の積は，記号では$[A][B]=[C]$と表されるが，積が定義されるのは$[A]$の列数と$[B]$の行数が一致する場合に限られる．行列の大きさを用いてこれを表現すると，$(m,n)\times(n,p)=(m,p)$となる．また，積$[C]$の要素c_{ij}で具体的に表すと，

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

となる．

$(n,n)\times(n,1)=(n,1)$ であり，これは正方行列×列ベクトル＝列ベクトルを意味している．構造物の剛性方程式はこれに該当し，剛性マトリックスを$[K]$，変位ベクトルを$\{x\}$，外力ベクトルを$\{F\}$で表すと，次式の関係にある．

構造物の剛性方程式： $[K]\{x\}=\{F\}$

注）剛性マトリックスは，バネ定数の概念を拡張したものに相当する．

特殊な例として，行ベクトル×列ベクトル＝スカラ　であり，内積(inner product)はそれに当たる．内積が０に等しいとき，２つのベクトルは直交している．
行列の積の交換則は，一般的には成立しない．

交換則： $[A][B]\neq[B][A]$

しかし，結合則，分配則は成立する

結合則： $([A][B])[C]=[A]([B][C])=[A][B][C]$

分配則： $[A]([B]+[C])=[A][B]+[A][C]$

なお，ある行列に別な行列を左側から掛ける操作或いは得られる式を左乗積，右側から掛ける操作或いは得られる式を右乗積という．

また，２つの行列の積の転置行列は，順番を入れ替えた行列の転置行列の積に等しい．

２重積の転置： $([A][B])^T=[B]^T[A]^T$

この公式と上の結合則を組み合わせると，３重積の転置は次式で表される．

３重積の転置：

$$([A][B][C])^T=(([A][B])[C])^T=[C]^T([A][B])^T=[C]^T[B]^T[A]^T$$

定理１　任意の正方行列とその転置行列の和は，対称行列となる．

定理２　対称行列と対称行列の積は，必ずしも対称行列とはならない．

定理３　行列の積の転置行列は，夫々の転置行列の順序を逆にした積に等しい．

問１　任意の正方行列を$\begin{bmatrix}3&4&9&5\\8&2&8&0\\5&0&6&1\\1&9&4&7\end{bmatrix}$と置くとき，この行列とその転置行列の和が対称行列となることを示せ．

問２　$[A]=\begin{bmatrix}3&4&9&5\\&2&8&0\\&&6&1\\sym.&&&7\end{bmatrix}$，$[B]=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\&2&1&0\\&&0&4\\sym.&&&3\end{bmatrix}$と置くとき，積$[A][B]$を求め，その積が対称行列か否か確認せよ．