

曲率に関する公式の誘導

(1) $\varepsilon_x = -\kappa \cdot y$ の誘導

下図に示す様に、 y の正方向を上向きとする。

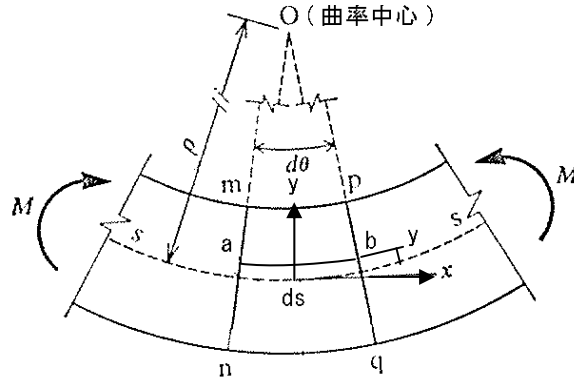


図-1

撓み曲線の法線 mn と pq の延長線は、曲率の中心 O で交わるとし、法線のなす角度を $d\theta$ 、曲率半径を ρ と置くと、上図から、 $ds = \rho \cdot d\theta$ (θ の単位 [rad])

$$\therefore \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}, \text{ 曲率 } \kappa \text{ は } \kappa = \frac{1}{\rho} \text{ と定義されるので, } \kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad \sim(1)$$

中立面である撓み曲線から圧縮側に距離 y の位置にある曲線 ab の長さは、

$$(\rho - y)d\theta = (\rho - y)\frac{ds}{\rho} = (1 - \frac{y}{\rho})ds$$

変形前の元の長さは ds であるから、曲線 ab の位置における歪度は次式で表せる。

$$\varepsilon_x = \frac{(1 - \frac{y}{\rho})ds - ds}{ds} = -\frac{y}{\rho} = -\kappa \cdot y \quad \sim(2)$$

なお、 y の正方向を下向きと仮定した場合には、(2)式の負符号が正となる。

(2) $\kappa = \frac{d^2v}{dx^2}$ の誘導

近似による誘導：下図において v を撓みとすると、微小変形を仮定しているので、

$$ds \approx dx, \quad \theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx}$$

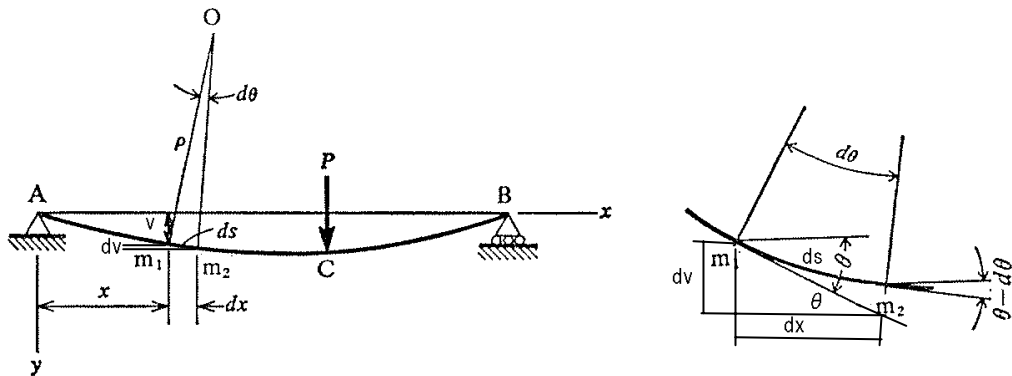


図-2

$$\kappa = \frac{d\theta}{ds} \text{ に } \theta = \frac{dv}{dx} \text{ を代入すると, } \kappa = \frac{d\theta}{ds} \approx \frac{d\theta}{dx} \approx \frac{d\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad \sim(3)$$

厳密式による誘導

図－２において、撓み曲線の回転角 θ と撓み曲線の傾斜 v' の関係は、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{dv}{dx} = v' \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1} v' = \arctan v' \\ \therefore \quad \kappa &= \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d(\arctan v')}{ds} = \frac{d(\arctan v')}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \end{aligned} \quad \sim(4)$$

$$ds^2 \approx dx^2 + dv^2 \text{ だから, } \therefore \quad \frac{ds^2}{dx^2} = 1 + \frac{dv^2}{dx^2}, \text{ 即ち } \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2} = [1 + (v')^2]^{\frac{1}{2}} \quad \sim(5)$$

$$\text{また, } \frac{d\theta}{dx} = \frac{d(\arctan v')}{dx} = \frac{1 \cdot v''}{1 + (v')^2} = \frac{v''}{1 + (v')^2} \quad \sim(6)$$

$\therefore$ 三角関数の微分公式より、 $f(x) = \arctan x$ とするとき、 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ だから。

(5),(6)を(4)に代入すると、

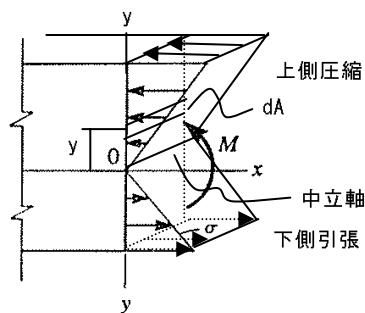
$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{v''}{1 + (v')^2} \cdot \frac{1}{[1 + (v')^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{曲率の厳密式})$$

1 に対して、 $(v')^2$ が非常に小さく 0 と見做すと、

$$\kappa = v'' = \frac{d^2v}{dx^2} \quad = (3)$$

(3) $M_z = EI_z \frac{d^2v}{dx^2}$ の誘導

弾性を仮定しているので、フックの法則と(2)式より、 $\sigma_x = E\varepsilon_x = (-\kappa \cdot y)E$



図－３

上図において、微小面積要素 dA が中立軸から距離 y の位置にあるとすると、この断面全体には軸方向合力は作用していないので、次式が成立する．

$$\int \sigma_x dA = -\int \kappa E y dA = -\kappa E \int y dA = 0$$

κE は定数だから、 $\int y dA = 0$ ．これは中立軸が断面の図心を通ることを意味している．

一方、力の要素 $\sigma_x dA$ の中立軸まわりのモーメントは、 $\sigma_x \cdot y \cdot dA$ である．中立軸の上側では圧縮応力、下側では引張応力が作用し、これらの合応力は、断面に働く曲げモーメントに等しい．したがって、曲げモーメント M_z は、このような微小要素モーメントの断面全体についての積分に等しいと置ける．

$$M_z = -\int \sigma_x y dA = \int \kappa E y^2 dA = \kappa E \int y^2 dA = \kappa E I_z \quad \sim(7)$$

なお、上式の負符号は、慣例にならい上側が圧縮： $\sigma_x < 0$ のとき、曲げモーメント M_z が正符号に一致するよう付加した．

$$(3) \text{式を(7)式に代入すると、} M_z = EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} \quad \sim(8)$$