

構造解析 第8回

4. 撓み性と剛性の変換

この変換は、数学的な操作と釣合条件、エネルギー原理のみに基づいているので、単一要素、骨組全体の両者に適用できる。

全体構造物の剛性方程式は、次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} P_f \\ P_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fs} \\ K_{sf} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_f \\ \Delta_s \end{Bmatrix} \quad \sim(4.1)$$

$\{\Delta_s\}$ は、拘束された支持点の変位で、0である。

$$\therefore \begin{Bmatrix} P_f \\ P_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ff} \\ K_{sf} \end{bmatrix} \{\Delta_f\}, \text{ これより, } \{P_f\} = [K_{ff}] \{\Delta_f\} = [d]^{-1} \{\Delta_f\}, \quad \sim(4.2)$$

$$\therefore \{\Delta_f\} = [K_{ff}]^{-1} \{P_f\} = [d] \{P_f\} \quad \sim(4.3)$$

$$\text{ただし, } [K_{ff}] = [d]^{-1} \quad \sim(4.4)$$

釣合条件より、釣合マトリックス $[\phi]$ を用いて、次の様に表示できる。

$$\{P_s\} = [\phi] \{P_f\} \quad \sim(4.5)$$

ただし、 $[\phi]$ ：静定釣合状態にある方程式群の係数マトリックス

上式に(4.2)式を代入すると、 $\{P_s\} = [\phi][d]^{-1} \{\Delta_f\}$

一方、(4.1)式より $\{P_s\} = [K_{sf}] \{\Delta_f\}$ だから、これら2つの式を比較すると、

$$[K_{sf}] = [\phi][d]^{-1} \quad \sim(4.6)$$

次に $[K_{fs}]$ は、相反定理²⁾ ($k_{ij} = k_{ji}$) を適用して次の様に得られる。

$$[K_{fs}] = [K_{sf}]^T = ([\phi][d]^{-1})^T = ([d]^{-1})^T [\phi]^T = [d]^{-1} [\phi]^T \quad \sim(4.7)$$

$\therefore [d]^{-1}$ は対称マトリックスだから、その転置は元の形と同じである。

$[K_{ss}]$ については、(4.1)式より

$$\{P_s\} = [K_{sf}] \{\Delta_f\} + [K_{ss}] \{\Delta_s\} \quad \sim(4.8)$$

$$\{P_f\} = [K_{ff}] \{\Delta_f\} + [K_{fs}] \{\Delta_s\} \quad \sim(4.9)$$

(4.9)式に左から $[\phi]$ を乗じると、

$$[\phi] \{P_f\} = [\phi][K_{ff}] \{\Delta_f\} + [\phi][K_{fs}] \{\Delta_s\} \quad \sim(4.10)$$

(4.5)式より、上式の左辺は $\{P_s\}$ に等しいので、(4.8)と(4.10)式の右辺は等しい。

$$(4.8)-(4.10) \text{ より, } ([K_{sf}] - [\phi][K_{ff}]) \{\Delta_f\} + ([K_{ss}] - [\phi][K_{fs}]) \{\Delta_s\} = 0$$

$$\therefore \text{左辺第二項目の式から, } [K_{ss}] = [\phi][K_{fs}] = [\phi][d]^{-1} [\phi]^T \quad \sim(4.11)$$

以上、(4.4),(4.6),(4.7),(4.11)式より、

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{fs}] \\ [K_{sf}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [d]^{-1} & [d]^{-1} [\phi]^T \\ [\phi][d]^{-1} & [\phi][d]^{-1} [\phi]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ff}] & [K_{ff}] [\phi]^T \\ [\phi][K_{ff}] & [\phi][K_{ff}] [\phi]^T \end{bmatrix} \quad \sim(4.12)$$

K:stiffness matrix, d: flexibility matrix

²⁾ 相反定理については、資料“相反性(reciprocity)”参照

マトリックス3重積は、中央の $[K_{ff}]$ が対称なら3重積も対称マトリックスとなる。
 上式より、剛性マトリックスは、 $[\phi]$ 、 $[d]$ あるいは $[\phi]$ 、 $[K_{ff}]$ で表示できること、撓み性マトリックスから剛体運動の自由度を含む剛性マトリックスへ変換できることが分かる。

ラーメン部材の要素剛性マトリックス

以下の誘導での前提条件

・微小変形理論が成立、中間荷重は作用しない、横荷重によるせん断変形を無視する。
 その他に

- ・部材断面は材軸に沿って一様で2軸対称の断面を有する。
 (Z軸回りの材端モーメントと横荷重は、面外変形を引き起こさない)
- ・(軸方向力と曲げ) および (軸方向力とせん断変形) とは連成しない。

局部座標軸のとり方～x軸：要素の図心軸に、y軸：断面の最小主軸に一致させる。

(1) 剛性マトリックスの誘導 (撓み性と剛性の変換を用いた誘導)

撓み性マトリックスを作るために必要な安定で静定支持された部材として、(1)単純支持形式、(2)片持ち梁形式、の2つがある。いずれを用いて誘導しても結果は同じなので、以下では片持ち梁形式を用いて誘導する。

i) 軸方向力が作用する場合

下図で F_{y2} 、 M_{z2} が作用せず、 $\{F_f\} = F_{x2}$ のみが作用したとき、節点2の変位は、

$$u_2 = \int_0^L \epsilon dx = \int_0^L \frac{\sigma}{E} dx = \int_0^L \frac{F_{x2}}{EA} dx = \frac{F_{x2}L}{EA} = [d]F_{x2}, \quad \text{ただし, } [d] = \frac{L}{EA}$$

$$\therefore [k_{ff}] = [d]^{-1} = \frac{EA}{L}$$

反力 $\{F_s\}$ は、力の釣合より、 $F_{x1} = -F_{x2}$ 、(4.5)式と比較すると、 $[\phi] = -1$

$$(4.12) \text{中央の式より, } [\phi] = -1 \text{を代入して, } [k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{次式が得られる. } \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad \sim (4.13)$$

ii) 曲げモーメント、せん断力が作用する場合

$$(4.3) \text{式より, } \{\Delta_f\} = [d]\{P_f\} \text{だから, } \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = [d] \begin{Bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}$$

上式の撓み性マトリックス $[d]$ は、次のように求める。

$[d]$ の誘導

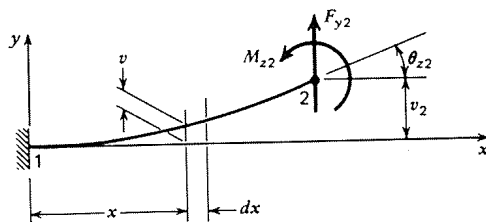


図 4-1 片持ち梁を静定基本形とした場合

上図を参照すると、撓み曲線を表す微分方程式³⁾より、

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{1}{EI_z} [F_{y2}(L-x) + M_{z2}]$$

積分して、

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI_z} \left[F_{y2} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + M_{z2}x \right] + C_1$$

更に積分すると、

$$v = \frac{1}{EI_z} \left[F_{y2} \left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \frac{M_{z2}x^2}{2} \right] + C_1x + C_2$$

$$\text{境界条件は、} \left[\frac{dv}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad \therefore C_1 = 0 \quad \text{および} \quad [v]_{x=0} = 0 \quad \therefore C_2 = 0$$

したがって弾性曲線は次のようになる。

$$\text{変位：} v = \frac{F_{y2} \cdot x^2}{2EI_z} \left(L - \frac{x}{3} \right) + \frac{M_{z2}x^2}{2EI_z}, \quad \text{回転角：} \frac{dv}{dx} = \frac{F_{y2} \cdot x}{EI_z} \left(L - \frac{x}{2} \right) + \frac{M_{z2} \cdot x}{EI_z}$$

$$\therefore v_2 = [v]_{x=L} = \frac{F_{y2}L^3}{3EI_z} + \frac{M_{z2}L^2}{2EI_z}, \quad \theta_{z2} = \left[\frac{dv}{dx} \right]_{x=L} = \frac{F_{y2}L^2}{2EI_z} + \frac{M_{z2}L}{EI_z}$$

以上を行列式にまとめると、

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{L}{EI_z} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = [d] \begin{Bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}, \quad \therefore [d] = \frac{L}{EI_z} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \sim(4.14)$$

[d]の誘導終了

次に、釣合マトリックス $[\phi]$ と $[d]^{-1}$ を求める。

図 4-1 を参照し、力の釣合式を y 方向、z 軸回りでたてると、 $\{F_s\} = [\phi]\{F_f\}$ より、

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix}, \quad \therefore [\phi] = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ L & 1 \end{bmatrix} \quad \sim(4.15)$$

$$(4.14)\text{式より、} [d]^{-1} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3} & \frac{L}{2} \\ \frac{L}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad \sim(4.16)$$

要素剛性であるので、(4.12)式において $K \rightarrow k$ に置き換え、

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ff} \\ k_{sf} \\ k_{fs} \\ k_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [d]^{-1} & [d]^{-1}[\phi]^T \\ [\phi][d]^{-1} & [\phi][d]^{-1}[\phi]^T \end{bmatrix} \text{に代入すると、}$$

$$[d]^{-1}[\phi]^T = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} - \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -L \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^2} - \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 \end{bmatrix} \quad \sim(4.17)$$

³⁾ 撓み曲線の微分方程式については、資料“曲率に関する公式の誘導”参照

$$[\phi][d]^{-1}[\phi]^T = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -L & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^2} - \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \quad \sim(4.18)$$

相反定理 ($k_{ij} = k_{ji}$) を適用した(4.7)式より, $K \rightarrow k$ に置き換えると,

$$[k_{fs}] = [k_{sf}]^T \quad \text{だから,} \quad \therefore \quad [k_{sf}] = [k_{fs}]^T \quad \text{である.}$$

$$\text{以上より,} \quad \begin{Bmatrix} F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_{z2} \\ v_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} \quad \sim(4.19)$$

最終的に(4.13), (4.19)式をまとめると, 2次元の要素剛性マトリックスは,

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} - \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} - \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \end{Bmatrix} \quad \sim(4.20)$$

自由度の添字を小さい順に並べ替えると, 部材の要素剛性方程式は, 下式となる.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} - \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} - \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} - \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{z1} \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad \sim(4.21)$$

上式の局部座標系表示の剛性マトリックスを全体座標系表示に変換するには, トラスの場合と同様に, (2.18)式にラーメンの座標変換マトリックス(2.14b)式を代入する. 通常, 上記座標変換はプログラム内で, $[K] = [\Gamma]^{-1}[k][\Gamma] = [\Gamma]^T[k][\Gamma]$ を計算する方が, 簡潔で分かり易い.

例題 4.1

全体座標系表示に変換した剛性マトリックスが対称となることを確認せよ.

解答

(2.18)式にラーメンの座標変換マトリックス(2.14b)式を代入すると、

$$[K] = [\Gamma]^{-1} [k] [\Gamma] = [\Gamma]^T [k] [\Gamma]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \cos\phi & -\frac{12EI_z}{L^3} \sin\phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \sin\phi & -\frac{EA}{L} \cos\phi & \frac{12EI_z}{L^3} \sin\phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \sin\phi \\ \frac{EA}{L} \sin\phi & \frac{12EI_z}{L^3} \cos\phi & \frac{6EI_z}{L^2} \cos\phi & -\frac{EA}{L} \sin\phi & -\frac{12EI_z}{L^3} \cos\phi & \frac{6EI_z}{L^2} \cos\phi \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} \cos\phi & \frac{12EI_z}{L^3} \sin\phi & \frac{6EI_z}{L^2} \sin\phi & \frac{EA}{L} \cos\phi & -\frac{12EI_z}{L^3} \sin\phi & \frac{6EI_z}{L^2} \sin\phi \\ -\frac{EA}{L} \sin\phi & -\frac{12EI_z}{L^3} \cos\phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \cos\phi & \frac{EA}{L} \sin\phi & \frac{12EI_z}{L^3} \cos\phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \cos\phi \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} \cos^2 \phi + \frac{12EI_z}{L^3} \sin^2 \phi & \frac{EA}{L} \sin \phi \cos \phi - \frac{12EI_z}{L^3} \sin \phi \cos \phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \sin \phi \\
\frac{EA}{L} \sin \phi \cos \phi - \frac{12EI_z}{L^3} \sin \phi \cos \phi & \frac{EA}{L} \sin^2 \phi + \frac{12EI_z}{L^3} \cos^2 \phi & \frac{6EI_z}{L^2} \cos \phi \\
-\frac{6EI_z}{L^2} \sin \phi & \frac{6EI_z}{L^2} \cos \phi & \frac{4EI_z}{L} \\
-\frac{EA}{L} \cos^2 \phi - \frac{12EI_z}{L^3} \sin^2 \phi & -\frac{EA}{L} \sin \phi \cos \phi + \frac{12EI_z}{L^3} \sin \phi \cos \phi & \frac{6EI_z}{L^2} \sin \phi \\
-\frac{EA}{L} \sin \phi \cos \phi + \frac{12EI_z}{L^3} \sin \phi \cos \phi & -\frac{EA}{L} \sin^2 \phi - \frac{12EI_z}{L^3} \cos^2 \phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \cos \phi \\
-\frac{6EI_z}{L^2} \sin \phi & \frac{6EI_z}{L^2} \cos \phi & \frac{2EI_z}{L} \\
-\frac{EA}{L} \cos^2 \phi - \frac{12EI_z}{L^3} \sin^2 \phi & -\frac{EA}{L} \sin \phi \cos \phi + \frac{12EI_z}{L^3} \sin \phi \cos \phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \sin \phi \\
-\frac{EA}{L} \sin \phi \cos \phi + \frac{12EI_z}{L^3} \sin \phi \cos \phi & -\frac{EA}{L} \sin^2 \phi - \frac{12EI_z}{L^3} \cos^2 \phi & \frac{6EI_z}{L^2} \cos \phi \\
\frac{6EI_z}{L^2} \sin \phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \cos \phi & \frac{2EI_z}{L} \\
\frac{EA}{L} \cos^2 \phi + \frac{12EI_z}{L^3} \sin^2 \phi & \frac{EA}{L} \sin \phi \cos \phi - \frac{12EI_z}{L^3} \sin \phi \cos \phi & \frac{6EI_z}{L^2} \sin \phi \\
\frac{EA}{L} \sin \phi \cos \phi - \frac{12EI_z}{L^3} \sin \phi \cos \phi & \frac{EA}{L} \sin^2 \phi + \frac{12EI_z}{L^3} \cos^2 \phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \cos \phi \\
\frac{6EI_z}{L^2} \sin \phi & -\frac{6EI_z}{L^2} \cos \phi & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix} \sim (4.22)$$

∴ 上記の全体座標系表示の剛性マトリックスは、対称マトリックスとなっている。

なお、自由度の並びは水平、鉛直、回転の順となっていること、各自由度の正方向は図 3-2 に示した場合の剛性マトリックスである。これとは、自由度の並び順が異なる場合には、並び順に揃えて行と列を入れ替える必要がある。また例えば、モーメントと回転角の正方向を上記とは逆の時計回りを正とするなら、 $6EI_z/L^2$ の項の符号が逆になることに注意する必要がある。これは、例題 8 においてモーメントと回転角を逆向きにすると、部材角 R の符号、 F_{y1} 、 F_{y2} の式の符号が反転することに注意すると、容易に確認できる。

他端がヒンジ部材の要素剛性マトリックス

ラーメン部材は両端の節点が剛節点であり、トラス部材は両端の節点がピン節点である。ここでは、剛節点とピン節点を有する部材の剛性マトリックスについて記す。

剛性マトリックスの誘導は、部材の両端に回転バネを挿入した剛性マトリックスを先ず求め、次いで剛節点側の回転バネ剛性を無限大、ピン節点側の回転バネ剛性を 0 と置き誘導する。やや煩雑な誘導となるので、以下には結果のみ示す。ただし、自由度の並び順、節点力、節点変位の正方向は、ラーメン部材の場合に同じとする。

(a) 剛ーピン部材の要素剛性マトリックス

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sim(4.23)$$

(b) ピンー剛部材の要素剛性マトリックス

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad \sim(4.24)$$

先と同様、モーメントと回転角の正方向を上記とは逆の時計回りを正とするなら、ラーメン部材の剛性マトリックスで $6EI_z/L^2$ の項があった行列に対応する要素の符号（即ち、(2,3),(2,6),(3,2),(3,5),(5,3),(5,6),(6,2),(6,5),ただし0の項は除く）が逆になる。

例題 7, 例題 8
演習問題 7, 演習問題 8