構造解析　第４回

2.3　２次元トラス部材の要素剛性方程式（全体座標系表示）

下図に示すように，局所座標系の x 軸が全体座標系の X 軸に対して角度 ϕ 傾いている．このとき，部材が左端の節点 1 を原点に，材軸を x 軸正側に一致するよう置かれた（即ち，部材が X 軸に対して ϕ 傾いて配置された）場合の全体座標系表示剛性方程式を以下に，座標変換マトリックスを用いて誘導する．

座標変換マトリックス

力 F は，局部座標系で表示すると $\vec{F} = \vec{f}_x + \vec{f}_y$，全体座標系で表示すると $\vec{F} = \vec{F}_X + \vec{F}_Y$ となるが，どちらで表示しても合力としての力 F は変わらない．下図を参照すると，(f_x, f_y) は (F_X, F_Y) を用いて次の様に表現できる．

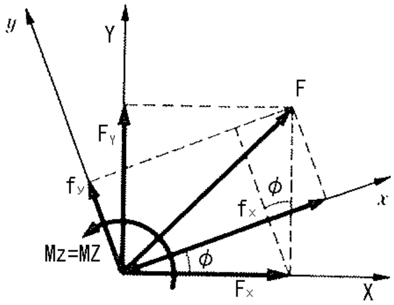

図 2-4

$$f_x = F_X \cos\phi + F_Y \sin\phi$$
$$f_y = -F_X \sin\phi + F_Y \cos\phi$$

ただし，ϕ ： X 軸と x 軸がなす角度または Y 軸と y 軸がなす角度

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} \qquad \sim(2.9)$$

ただし，$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$ ：座標変換マトリックス

(2.9)式に $[\Gamma]^{-1}$ を左乗積すると，$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = [\Gamma]^{-1} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix}$ 　　～(2.10)

図 2-5 を参照すると，上記とは逆に (F_X, F_Y) は (f_x, f_y) を用いて，次の様に表現できる．

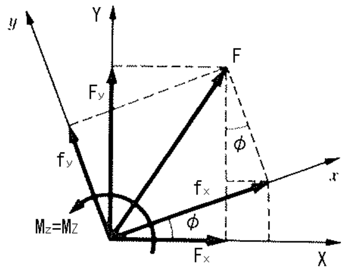

図 2-5

$$F_X = f_x \cos\phi - f_y \sin\phi$$

$$F_Y = f_x \sin\phi + f_y \cos\phi$$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \qquad \sim(2.11)$$

(2.10)と(2.11)式を比較すると，$[\Gamma]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = [\Gamma]^T$ であることが分かる．このように逆マトリックスが転置マトリックスに等しい行列を直交マトリックスと呼ぶ．したがって，座標変換マトリックスは直交マトリックスである．

変位に関しても力と同様に次のように表現できる．

$$\begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} = [\Gamma] \begin{Bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \end{Bmatrix} \qquad \sim(2.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \end{Bmatrix} = [\Gamma]^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{Bmatrix} \qquad \sim(2.13)$$

上の座標変換マトリックスは，節点 1 に関するものである．部材右端の節点 2 についても上記の関係が成立する．したがって，部材の両端に拡張したトラスの座標変換マトリックスは，次式となる．

トラスの座標変換マトリックス：
$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \qquad \sim(2.14a)$$

因みに，ラーメンの座標変換マトリックスの場合には，モーメントの項が上式に追加されるが， z 軸と Z 軸のモーメントは一致するので，座標変換の前後で変わらない．故に自由度の並び順を上から節点 1 の水平，鉛直，回転，節点 2 の水平，鉛直，回転とすると，次式となる．

ラーメンの座標変換マトリックス：
$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sim(2.14b)$$

要素剛性方程式

局部座標系表示の剛性方程式を $\{f\} = [k]\{\delta\}$ 〜(2.15)

全体座標系表示の剛性方程式を $\{F\} = [K]\{\Delta\}$ 〜(2.16)

と表す．ここで(2.15)式に(2.12),(2.9)式を代入すると，$[\Gamma]\{F\} = [k][\Gamma]\{\Delta\}$

更に上式の両辺に $[\Gamma]^{-1}$ を左乗積すると，$\{F\} = [\Gamma]^{-1}[k][\Gamma]\{\Delta\}$ 〜(2.17)

(2.16)と(2.17)式を比較すると，全体座標系表示剛性マトリックスは局部座標系表示剛性マトリックスと座標変換マトリックスを用いて，次式で表されることが分かる．

$$[K] = [\Gamma]^{-1}[k][\Gamma] = [\Gamma]^T[k][\Gamma] \qquad \sim(2.18)$$

したがってトラスの場合，上式に (2.14a)式と 2 次元に拡張した(2.6)式の要素剛性マトリ

ックスを代入すると，

$$
\begin{aligned}
[K] &= [\Gamma]^T [k][\Gamma] \\
&= \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \\
&= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin\phi\cos\phi & -\cos^2\phi & -\sin\phi\cos\phi \\ \sin\phi\cos\phi & \sin^2\phi & -\sin\phi\cos\phi & -\sin^2\phi \\ -\cos^2\phi & -\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi & \sin\phi\cos\phi \\ -\sin\phi\cos\phi & -\sin^2\phi & \sin\phi\cos\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}
\end{aligned}
\qquad \sim(2.19)
$$

以上より，最終的なトラス部材の全体座標系表示の要素剛性方程式は次式となる．

$$
\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin\phi\cos\phi & -\cos^2\phi & -\sin\phi\cos\phi \\ \sin\phi\cos\phi & \sin^2\phi & -\sin\phi\cos\phi & -\sin^2\phi \\ -\cos^2\phi & -\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi & \sin\phi\cos\phi \\ -\sin\phi\cos\phi & -\sin^2\phi & \sin\phi\cos\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \qquad \sim(2.20)
$$

通常，上記座標変換はプログラム内で，$[K] = [\Gamma]^{-1}[k][\Gamma] = [\Gamma]^T[k][\Gamma]$ を計算する方が，簡潔で分かり易い．

例題 3
例題 4
演習問題 2(a),(b)
演習問題 3