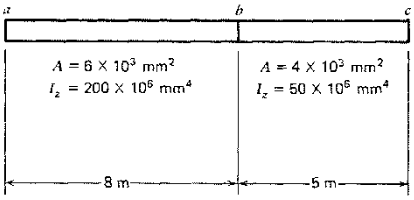
構造解析第 10 回
例題 9

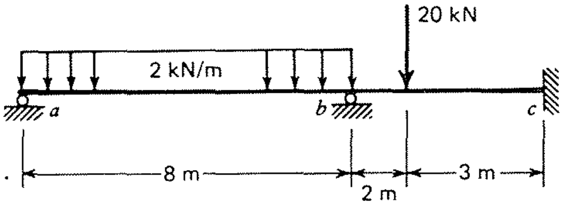


ただし，E=200000 MPa

上図に示したはりが，図のように支持され荷重を受けている．

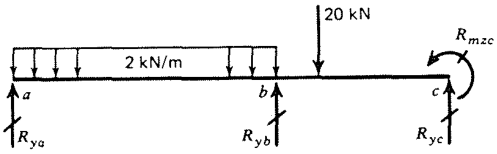
（1） a 点と b 点の変位を計算せよ．

（2） 反力と曲げモーメントを計算せよ．

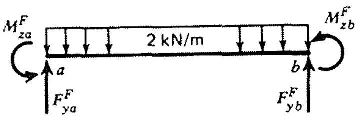


—— 解答 ——

先ず，ab 材，bc 材に分けて拘束系の固定端力（即ち，固定端の反力）を求める．



固定端力

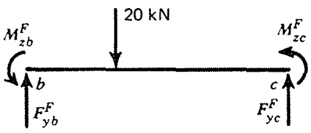


$M^F_{za} = \frac{2 \times 8^2}{12} = 10.67$ kNm

$M^F_{zb} = -10.67$ kNm

$F^F_{ya} = 8.00$ kN

$F^F_{yb} = 8.00$ kN



$M^F_{zb} = \frac{20 \times 2 \times 3^2}{5^2} = 14.40$ kNm

$M^F_{zc} = \frac{-20 \times 2^2 \times 3}{5^2} = -9.60$ kNm

$F^F_{yb} = \frac{3 \times 20}{5} + (\frac{14.4 - 9.6}{5}) = 12.96$ kN [1)]

$F^F_{yc} = 7.04$ kN

(1) 変位

式(4.21)から軸方向変位の自由度に関する行列を除いた剛性マトリックスを参照すると，

$$
\begin{Bmatrix} R_{ya} \\ P_{mza} \\ R_{yb} \\ P_{mzb} \\ R_{yc} \\ R_{mzc} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{12EI_{ab}}{L_{ab}^3} & \frac{6EI_{ab}}{L_{ab}^2} & -\frac{12EI_{ab}}{L_{ab}^3} & \frac{6EI_{ab}}{L_{ab}^2} & 0 & 0 \\
 & \frac{4EI_{ab}}{L_{ab}} & -\frac{6EI_{ab}}{L_{ab}^2} & \frac{2EI_{ab}}{L_{ab}} & 0 & 0 \\
 & & \frac{12EI_{ab}}{L_{ab}^3}+\frac{12EI_{bc}}{L_{bc}^3} & -\frac{6EI_{ab}}{L_{ab}^2}+\frac{6EI_{bc}}{L_{bc}^2} & -\frac{12EI_{bc}}{L_{bc}^3} & \frac{6EI_{bc}}{L_{bc}^2} \\
 & & & \frac{4EI_{ab}}{L_{ab}}+\frac{4EI_{bc}}{L_{bc}} & -\frac{6EI_{bc}}{L_{bc}^2} & \frac{2EI_{bc}}{L_{bc}} \\
 & & & & \frac{12EI_{bc}}{L_{bc}^3} & -\frac{6EI_{bc}}{L_{bc}^2} \\
 Sym. & & & & & \frac{4EI_{bc}}{L_{bc}}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_a \\ \theta_{za} \\ v_b \\ \theta_{zb} \\ v_c \\ \theta_{zc} \end{Bmatrix}
$$

---

1) $F^F_{yb} = \frac{Pb}{\ell} + \frac{(M^F_{Zb} + M^F_{Zc})}{\ell}$，或いは次の公式 $F^F_{yb} = \frac{Pb^2}{\ell^3}(3a+b)$ で求める． $a = 2, b = 3, \ell = 5m$

$$
+\begin{Bmatrix} F_{ya}^{F} \\ M_{za}^{F} \\ F_{yb}^{F\_ab}+F_{yb}^{F\_bc} \\ M_{zb}^{F\_ab}+M_{zb}^{F\_bc} \\ F_{yc}^{F} \\ M_{zc}^{F} \end{Bmatrix} \qquad \sim\text{(A)}
$$

↑
固定端反力ベクトル

$$\frac{2EI_{ab}}{L_{ab}}=\frac{2\times 200000[N/mm^2]\times 200\times 10^6[mm^4]}{8\times 10^3[mm]}=200\times\frac{400}{8}\times 10^6[N\cdot mm]=200\times 0.5\times 10^5[kN\cdot mm]$$

$$\frac{4EI_{ab}}{L_{ab}}=200\times 1\times 10^5[kN\cdot mm]$$

$$\frac{6EI_{ab}}{L_{ab}^2}=\frac{2EI_{ab}}{L_{ab}}\cdot\frac{3}{L_{ab}}=200\times 0.5\times 10^5[kN\cdot mm]\times\frac{3}{8\times 10^3[mm]}=200\times 18.75[kN]$$

$$\frac{12EI_{ab}}{L_{ab}^3}=\frac{6EI_{ab}}{L_{ab}^2}\cdot\frac{2}{L_{ab}}=200\times 18.75[kN]\times\frac{2}{8\times 10^3[mm]}=200\times 0.00469[kN/mm]$$

同様に，

$$\frac{2EI_{bc}}{L_{bc}}=\frac{2\times 200000[N/mm^2]\times 50\times 10^6[mm^4]}{5\times 10^3[mm]}=200\times 20\times 10^6[N\cdot mm]=200\times 0.2\times 10^5[kN\cdot mm]$$

$$\frac{4EI_{bc}}{L_{bc}}=200\times 0.4\times 10^5[kN\cdot mm]$$

$$\frac{6EI_{bc}}{L_{bc}^2}=\frac{2EI_{bc}}{L_{bc}}\cdot\frac{3}{L_{bc}}=200\times 0.2\times 10^5[kN\cdot mm]\times\frac{3}{5\times 10^3[mm]}=200\times 12[kN]$$

$$\frac{12EI_{bc}}{L_{bc}^3}=\frac{6EI_{bc}}{L_{bc}^2}\cdot\frac{2}{L_{bc}}=200\times 12[kN]\times\frac{2}{5\times 10^3[mm]}=200\times 0.0048[kN/mm]$$

∴

$$
\begin{Bmatrix} R_{ya} \\ P_{mza} \\ R_{yb} \\ P_{mzb} \\ R_{yc} \\ R_{mzc} \end{Bmatrix}
=200\begin{bmatrix}
0.00469 & 18.75 & -0.00469 & 18.75 & 0 & 0 \\
 & 1\times 10^5 & -18.75 & 0.5\times 10^5 & 0 & 0 \\
 & & 0.00949 & -6.75 & -0.00480 & 12.00 \\
 & \text{Sym.} & & 1.4\times 10^5 & -12.00 & 0.2\times 10^5 \\
 & & & & 0.00480 & -12.00 \\
 & & & & & 0.4\times 10^5
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} v_a \\ \theta_{za} \\ v_b \\ \theta_{zb} \\ v_c \\ \theta_{zc} \end{Bmatrix}
+\begin{Bmatrix} 8.00 \\ 10.67\times 10^3 \\ 20.96 \\ 3.73\times 10^3 \\ 7.04 \\ -9.60\times 10^3 \end{Bmatrix} \qquad \sim\text{(B)}
$$

この式で a 点，b 点にモーメントが外力として作用していないので，$P_{mza}=P_{mzb}=0$
また，境界条件より，$v_a=v_b=v_c=\theta_{zc}=0$　とおき，次の様に並べ換え分割しておく．

$$
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline R_{ya} \\ R_{yb} \\ R_{yc} \\ R_{mzc} \end{Bmatrix}
=200
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc|cccc} \theta_{za} & \theta_{zb} & v_a & v_b & v_c & \theta_{zc} \end{array} \\
\left[\begin{array}{cc|cccc}
1\times 10^5 & 0.5\times 10^5 & 18.75 & -18.75 & 0 & 0 \\
 & 1.4\times 10^5 & 18.75 & -6.75 & -12.00 & 0.2\times 10^5 \\ \hline
 & & 0.00469 & -0.00469 & 0 & 0 \\
 & \text{Sym.} & & 0.00949 & -0.00480 & 12.00 \\
 & & & & 0.00480 & -12.00 \\
 & & & & & 0.4\times 10^5
\end{array}\right]
\end{array}
\times
\begin{Bmatrix} \theta_{za} \\ \theta_{zb} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

$$
+\left\{\begin{array}{c} 10.67\times10^{3} \\ 3.73\times10^{3} \\ \hline 8.00 \\ 20.96 \\ 7.04 \\ -9.60\times10^{3} \end{array}\right\}
$$

ただし，上式でモーメントの単位は[kNmm]，力の単位は[kN]である．上式の右辺第 2 項を左辺に移項し，上の分割部分を展開すると，

$$
\begin{Bmatrix}\theta_{za} \\ \theta_{zb}\end{Bmatrix} = \frac{10^{-2}}{200}\begin{bmatrix}1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.4\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}-10.67 \\ -3.73\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}-5.684\times10^{-4} \\ 0.698\times10^{-4}\end{Bmatrix}\mathrm{rad}
$$

（2） 反力．下の分割部分より，

$$
\begin{Bmatrix}R_{ya} \\ R_{yb} \\ R_{yc} \\ R_{mzc}\end{Bmatrix} = 2\times10^{-2}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\theta_{za} & \theta_{zb}\end{array} \\ \begin{bmatrix}18.75 & 18.75 \\ -18.75 & -6.75 \\ 0 & -12.00 \\ 0 & 0.2\times10^{5}\end{bmatrix}\end{array}\begin{Bmatrix}-5.684 \\ 0.698\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}8.00 \\ 20.96 \\ 7.04 \\ -9.60\times10^{3}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}6.13\ \mathrm{kN} \\ 23.00\ \mathrm{kN} \\ 6.87\ \mathrm{kN} \\ -9.32\times10^{3}\ \mathrm{kNmm}\end{Bmatrix}
$$

曲げモーメントの算定

中間荷重が作用する場合の部材端力は，次式で求められる．

$$
\{f\}=[k]\{\delta\}+\{p^F\}
$$

ただし，$\{f\}$: 部材端力（部材座標系），$[k]$: 部材剛性マトリックス（部材座標系），$\{\delta\}$ ：部材両端の変位（部材座標系），$\{p^F\}$ ：部材の固定端反力

今，先の(A)式において ab 材に関して，回転角以外の変位は 0 であることを考慮して材端モーメントに関する項のみ抜粋すると，

$$
\begin{Bmatrix}M_{za}^{ab} \\ M_{zb}^{ab}\end{Bmatrix} = 200\begin{bmatrix}1\times10^{5} & 0.5\times10^{5} \\ 0.5\times10^{5} & 1\times10^{5}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-5.684\times10^{-4} \\ 0.698\times10^{-4}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}M_{za}^{F}=10.67\times10^{3}\,kNmm \\ M_{zb}^{F}=-10.67\times10^{3}\,kNmm\end{Bmatrix}
$$

$$
=\begin{Bmatrix}0 \\ -14.96\times10^{3}\end{Bmatrix}kNmm
$$

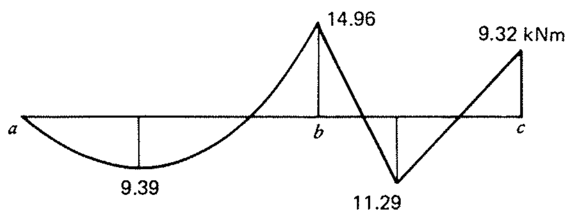
同様に，先の(A)式において bc 材に関して，回転角以外の変位は 0 であることを考慮して材端モーメントに関する項のみ抜粋すると，

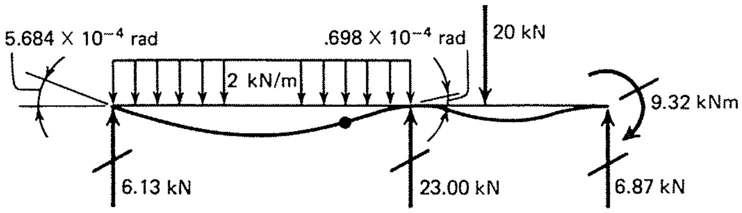
$$
\begin{Bmatrix}M_{zb}^{bc} \\ M_{zc}^{bc}\end{Bmatrix} = 200\begin{bmatrix}0.4\times10^{5} & 0.2\times10^{5} \\ 0.2\times10^{5} & 0.4\times10^{5}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.698\times10^{-4} \\ 0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}M_{zb}^{F}=14.40\times10^{3}\,kNmm \\ M_{zc}^{F}=-9.60\times10^{3}\,kNmm\end{Bmatrix}
$$

$$
=\begin{Bmatrix}14.96\times10^{3} \\ -9.32\times10^{3}\end{Bmatrix}kNmm
$$

なお，M_{zc}^{bc} の値は反力の計算結果 R_{mzc} に等しいことが確認できる．材端モーメントから曲げモーメントに直す際には，夫々の符号の規約に留意する．

以上より，部材端の節点変位，部材端の節点曲げモーメントは得られた．しかし，部材中間の曲げモーメント，変位は末尾に掲載したような別途補助計算により求めなければならない．下記の曲げモーメント図，変形図は補助計算の結果を考慮して描いた図である．


14.96
9.32 kNm
a
b
c
9.39
11.29


5.684 X 10⁻⁴ rad
.698 X 10⁻⁴ rad
20 kN
2 kN/m
9.32 kNm
6.13 kN
23.00 kN
6.87 kN

例題 9 の応力，変形の補助計算

（1） 応力図

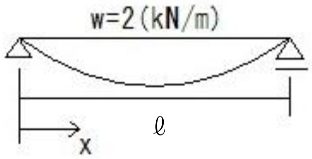
ｉ）ab 部材の最大応力計算

ab 部材を分離して考えた単純梁に等分布荷重が作用する曲げモーメント式は，

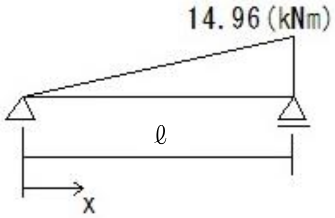
$$M_x = \frac{wx}{2}(l - x) \qquad \sim(1)$$

一方，ab 部材は bc 材に連結して b 端のモーメントが 14.96[kNm]なので，下図の曲げモーメント式は，

$$M_x = -\frac{14.96x}{l} \qquad \sim(2)$$



M 図



M 図

(1)+(2)より， $M_x = \frac{wx}{2}(l - x) - \frac{14.96x}{l}$

$\frac{dM_x}{dx} = \frac{wl}{2} - wx - \frac{14.96}{l} = 0$ と置くと，

$x = \frac{1}{w}\left(\frac{wl}{2} - \frac{14.96}{l}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\times 8}{2} - \frac{14.96}{8}\right) = 3.065$ の位置で極値をとる．

$$M_x\,|_{x=3.065} = \left[\frac{2x}{2}(8 - x) - \frac{14.96x}{8}\right]_{x=3.065} = 3.065\times(8 - 3.065) - \frac{14.96}{8}\times 3.065$$

$$= 3.065\times(4.935 - 1.87) = 9.394[kNm]$$

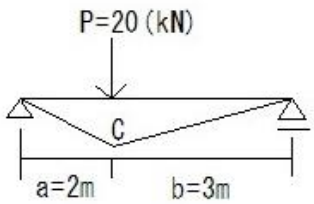
ⅱ）bc 部材の最大応力値計算

下図の夫々について，c 点の曲げモーメント式は，次の通り．

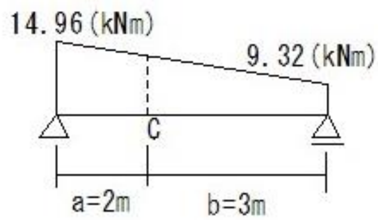
$$M_c = \frac{P\cdot ab}{l} = \frac{20\times 2\times 3}{5} = 24[kNm] \qquad \sim(3)$$

$$M_c = 9.32 + \frac{(14.96 - 9.32)}{5}\times 3 = 9.32 + 3.384 = 12.704[kNm] \qquad \sim(4)$$

∴ (3)-(4)式より， $M_c = 24 - 12.704 = 11.296[kNm]$



M 図



M 図

（２） 変形図

具体的な計算例を示す前に，変形を合成する一般的な考え方を記す．
・拘束系の変形図は，事前に初等力学で得られているものとする．
・拘束除去系では，解析後両端節点移動変位，回転変位が得られる．
・応力図から $M=0$ となる反曲点の有無を確認し，拘束除去系の変形図を表わす関数式を仮定する．
　例えば，反曲点が無ければ２次式，反曲点数に応じて３次，４次式など．
・拘束除去系の両端節点変位を与条件として関数式に代入し，それを規定する．

例１）反曲点無し：２次式とした場合

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$y' = 2ax + b$$

変形後の１端，２端の変位を $\lfloor u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \rfloor^T$，$\lfloor u_2^* \quad v_2 \quad \theta_2 \rfloor^T$ と置き，与条件を上の２つの方程式に代入すると，４つの式が得られ未定係数を定めることができる．

$$v_1 = a{u_1}^2 + bu_1 + c, \qquad v_2 = au_2^{*2} + bu_2^* + c$$
$$y'|_{1node} = 2au_1 + b = \theta_1, \qquad y'|_{2node} = 2au_2^* + b = \theta_2$$

ただし，$u_2^* = u_2 +$ 部材長

∴　行列式で表示すると次の通りとなり，未定係数を規定できる．

$$\begin{bmatrix} {u_1}^2 & u_1 & 1 \\ u_2^{*2} & u_2^* & 1 \\ 2u_1 & 1 & 0 \\ 2u_2^* & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad \sim(5)$$

例２）反曲点有り：３次式とした場合

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

上記と同様に，４つの式が得られ未定係数を定めることができる．

$$v_1 = a{u_1}^3 + b{u_1}^2 + cu_1 + d, \qquad v_2 = au_2^{*3} + bu_2^{*2} + cu_2^* + d$$
$$y'|_{1node} = 3a{u_1}^2 + 2bu_1 + c = \theta_1, \qquad y'|_{2node} = 3au_2^{*2} + 2bu_2^* + c = \theta_2$$

ただし，$u_2^* = u_2 +$ 部材長

∴　行列式で表示すると，

$$\begin{bmatrix} {u_1}^3 & {u_1}^2 & u_1 & 1 \\ u_2^{*3} & u_2^{*2} & u_2^* & 1 \\ 3{u_1}^2 & 2u_1 & 1 & 0 \\ 3u_2^{*2} & 2u_2^* & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \qquad \sim(6)$$

具体的な計算例：ab 部材の拘束除去系の変形図の計算

応力図から $M=0$ が 1 ヶ所，即ち反曲点が 1 個あるので，例 2）3 次式を用い，次の各変位：
$u_1=0$，$u_2^*=0+l=8$，$v_1=0$，$v_2=0$，$\theta_1=-5.684\times10^{-4}[rad]$，
$\theta_2=0.698\times10^{-4}[rad]$ を(6)式に代入すると，

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8^3 & 8^2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3\times8^2 & 2\times8 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.684\times10^{-4} \\ 0.698\times10^{-4} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8^3 & 8^2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3\times8^2 & 2\times8 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\times\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.684\times10^{-4} \\ 0.698\times10^{-4} \end{Bmatrix}$$

上式右辺第 1 項目の逆行列は存在し[1]，未定係数が下記の通り得られる．

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{Bmatrix}=1\times10^{-3}\begin{Bmatrix} -0.0078 \\ 0.1334 \\ -0.5684 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore\quad y=1\times10^{-3}\left[-0.0078x^3+0.1334x^2-0.5684x\right]$$

上式の単位は x，y 共に[m]であるが，y を[mm]単位に変換するならば，1×10^{-3} を省略できる．matlab で描いた拘束除去系の撓み曲線は末尾の通り．

一方，拘束系の撓み曲線は初等力学から，$\delta_x=\dfrac{wl^2x^2}{24EI}\left(1-\dfrac{2x}{l}+\dfrac{x^2}{l^2}\right)$

$$w=2[kN/m]=\frac{2\times10^3[N]}{10^3[mm]}=2[N/mm],\quad l=8[m]=8\times10^3[mm],$$

$E=200000[MPa]=200000[N/mm^2]$，$I=200\times10^6[mm^4]$ より，

$$EI=200000[N/mm^2]\times200\times10^6[mm^4]=4\times10^{13}[Nmm^2]$$

$$\therefore\quad \delta_x=\frac{2\times(8\times10^3)^2x^2[N/mm][mm^4]}{24\times4\times10^{13}[Nmm^2]}\left\{1-\frac{2x}{8\times10^3}+\frac{x^2}{(8\times10^3)^2}\right\}$$

ただし，撓みの単位は[mm]

matlab で描いた拘束系の撓み曲線は末尾の通り．

以上得られた 2 つの拘束除去系と拘束系の撓み曲線を合成すると，末尾の最後に示す撓み曲線が得られる．最大撓みは 1.2068[mm]である．

---

[1] 手計算は次ページの通り．

下記行列 A の逆行列を手計算せよ．

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8^3 & 8^2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3\times 8^2 & 2\times 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

（解）行列式の要素を a_{ij}，余因子を A_{ij} で表すと，行列式の値は次の通りとなる．

$$\det|A| = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14} = 0\times A_{11}+0\times A_{12}+0\times A_{13}+1\times A_{14}$$

$$=(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 8^3 & 8^2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3\times 8^2 & 2\times 8 & 1 \end{vmatrix} = -\left(3\times 8^4 - 2\times 8^4\right) = -8^4 = -4096$$

一方，各余因子は，

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 8^2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\times 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16\,, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 8^3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3\times 8^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 192$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 8^3 & 8^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3\times 8^2 & 2\times 8 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

上式より $A_{14}=-4096$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\times 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16\,, \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3\times 8^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -192$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3\times 8^2 & 2\times 8 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad A_{24}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3\times 8^2 & 2\times 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8^2 & 8 & 1 \\ 2\times 8 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -64\,, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8^3 & 8 & 1 \\ 3\times 8^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1024$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8^3 & 8^2 & 1 \\ 3\times 8^2 & 2\times 8 & 0 \end{vmatrix} = -4096\,, \qquad A_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8^3 & 8^2 & 8 \\ 3\times 8^2 & 2\times 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8^2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -64\,, \qquad A_{42}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8^3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 512$$

$$A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8^3 & 8^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,, \qquad A_{44}=(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8^3 & 8^2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

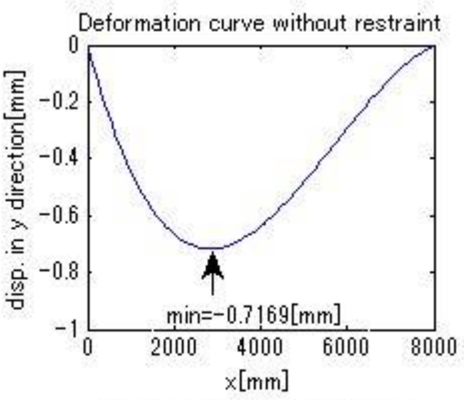
$$\therefore \quad [A]^{-1} = \frac{1}{\det|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-4096}\begin{bmatrix} -16 & 16 & -64 & -64 \\ 192 & -192 & 1024 & 512 \\ 0 & 0 & -4096 & 0 \\ -4096 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.0039 & -0.0039 & 0.0156 & 0.0156 \\ -0.0469 & 0.0469 & -0.2500 & -0.1250 \\ 0 & 0 & 1.000 & 0 \\ 1.000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

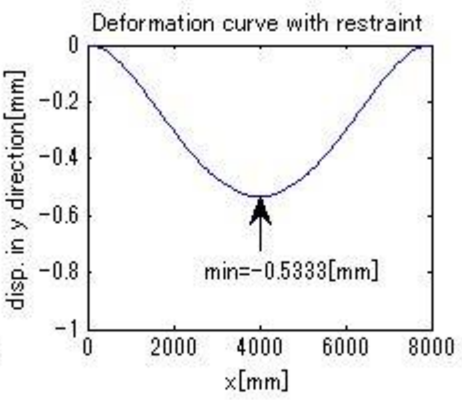
matlab による変形曲線の表示

（３）matlab プログラム

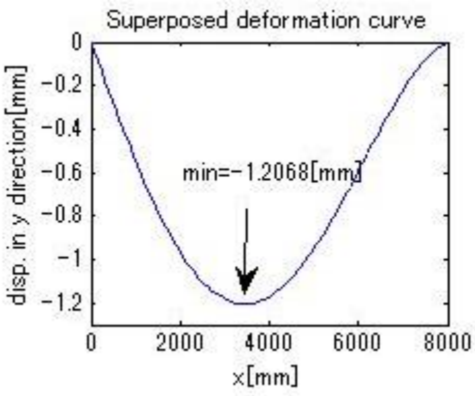
```
% 拘束除去系と拘束系の変形の重ね合わせ
x=[0:8/100:8];
y1=(-0.0078*x.^3+0.1334*x.^2-0.5684*x);
figure(1)
clf
subplot(2,2,1)
plot(1000*x,y1)
title('Deformation curve without restraint')
xlabel('x[mm]')
ylabel('disp. in y direction[mm]')
axis([0 8000 -1 0])
%
w=2;l=8*10^3;EI=4*10^13;
x=1000*x;
y2=(w*l^2*x.^2/(24*EI)).*(1-2.*x/l+x.^2/(l^2));
y2=-y2;
subplot(2,2,2)
plot(x,y2)
title('Deformation curve with restraint')
xlabel('x[mm]')
ylabel('disp. in y direction[mm]')
axis([0 8000 -1 0])
%
y3=y1+y2;
subplot(2,2,3)
plot(x,y3)
title('Superposed deformation curve')
xlabel('x[mm]')
ylabel('disp. in y direction[mm]')
axis([0 8000 -1.3 0])
```



(a) 拘束除去系



(b) 拘束系



(c) 拘束除去系＋拘束系